



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**METODY TOPOLOGICKÉ OPTIMALIZACE MECHANICKY  
NAMÁHANÝCH KONSTRUKCÍ A JEJICH APLIKACE U  
PRUTOVÝCH SOUSTAV**

METHODS FOR TOPOLOGY OPTIMIZATION OF MECHANICALLY LOADED STRUCTURES AND THEIR  
APPLICATION ON TRUSSES

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Ondřej Pánek

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.

**BRNO 2019**



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky  
Student: **Ondřej Pánek**  
Studijní program: Strojírenství  
Studijní obor: Základy strojního inženýrství  
Vedoucí práce: **Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.**  
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Metody topologické optimalizace mechanicky namáhaných konstrukcí a jejich aplikace u prutových soustav**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Práce bude zaměřena na řešení a nastudování metod sloužících pro topologickou optimalizaci mechanicky namáhaných struktur např. s cílem dosáhnout pro dané zatížení co nejnížší hmotnosti při současném zachování dostatečné tuhosti celé struktury (tedy co nejefektivněji využít použitý materiál v rámci daného objemu budoucí součásti). Student by měl v rámci bakalářské práce porozumět, na jakém principu topologická optimalizace funguje, získat přehled o nejčastěji používaných metodách a získané poznatky by měl být schopen aplikovat na příkladu optimalizace rozložení prutů u jednoduché 2D, silově zatížené, prutové soustavy.

### **Cíle bakalářské práce:**

Hlavním cílem práce je seznámení se s problematikou topologické optimalizace a demonstrace schopnosti jejího využití na jednoduché úloze silově zatížené rovinné prutové soustavy. Dílčí úkoly práce lze definovat následovně:

- 1) Provést řešení základních metod topologické optimalizace pro prutové soustavy i kontinuum.
- 2) Nastudovat a popsat na jakém principu jednotlivé metody fungují, včetně jejich případných omezení.
- 3) S využitím alespoň dvou vybraných metod provést topologickou optimalizaci rozložení prutů u zvolené, silově zatížené, prutové soustavy (např. s cílem redukovat její hmotnost na minimum při současném zachování dostatečné tuhosti).
- 4) Porovnat přednosti a slabé stránky použitých metod.

**Seznam doporučené literatury:**

BENDSOE, M. P., Optimization of Structural Topology, Shape, and Material , 1st ed., 273 pp., Springer, New York 1995.

QUERIN, O. M., M. VICTORIA, and P. MARTÍ, Topology Design Methods for Structural Optimization, 1st ed., 204 pp., Elsevier, Academic Press, London 2017.

SIGMUND, O., Design of Material Structures using Topology Optimization, DCAMM, Special report, S69, 1-108. 1994.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

.....

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

.....

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

# ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá topologickou optimalizací prutových soustav. V první části této práce je na základě rešerše dostupné literatury zpracován přehled jednotlivých metod strukturální optimalizace a stručně popsán jejich princip. Druhá část práce se zabývá aplikací vybraných metod na topologickou optimalizaci prutových soustav, k čemuž je využito výpočetních kódů naprogramovaných v prostředí programu MATLAB. V prvním kroku byl vytvořen kód pro výpočet napětí v jednotlivých prutech a posuvů styčníků prutové soustavy s využitím autorem naprogramované metody konečných prvků. Tento nástroj byl dále použit jako základ pro jednotlivé optimalizační úlohy, které tento algoritmus využívají pro získání výše uvedených parametrů. Vybrané optimalizační metody a jejich výpočetní kódy byly následně demonstrativně použity na dvou modelových úlohách – mostu a konzolovém nosníku, s cílem redukovat jejich hmotnost na minimum při současném zachování bezpečnosti vůči meznímu stavu pružnosti a meznímu stavu vzpěrné stability. Získané výsledky byly v závěru srovnány s výsledky dostupnými v literatuře (avšak optimalizovanými na výchozích konstrukcích ve formě kontinua) a lze konstatovat, že oba výstupy jsou ve velmi dobré shodě.

# KLÍČOVÁ SLOVA

topologická optimalizace, prutová soustava, kontinuum, mechanické zatížení



# **ABSTRACT**

This bachelor thesis deals with a topology optimization of truss structures. In the first part of this thesis an overview of individual methods of the structural optimization and brief description of their principle based on recherche of available literature is given. The second part of the thesis deals with an application of selected methods to the topology optimization of truss structures, employing the computational codes programmed in the MATLAB software. In the first step, a code for computation of stresses in individual trusses and displacements in nodes of the truss structure by the finite element method was programmed. This code was later used in individual topology optimization codes for computation of parameters mentioned above. Selected topology optimization methods and their computational codes were then used for optimization of two model tasks – bridge and cantilever beam subjected to isolated forces, in order to reduce their weight while maintaining safety to the limit states of elasticity and buckling stability. At the end of the thesis, gained results were compared to results available in literature (nevertheless optimized as a continuum structure) and it can be concluded, that both these results are in a very good agreement.

# **KEYWORDS**

topology optimization, truss structure, continuum, mechanical loading





## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

PÁNEK, Ondřej. *Metody topologické optimalizace mechanicky namáhaných konstrukcí a jejich aplikace u prutových soustav*. Brno, 2019. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/116238>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.



## **PODĚKOVÁNÍ**

Tímto bych chtěl poděkovat Ing. Oldřichu Ševečkovi, Ph.D za odborné vedení mé práce, cenné rady a vstřícnost při konzultacích. Dále bych chtěl poděkovat mé rodině a kamarádům za podporu během celého studia.



## **ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, zpracoval jsem ji samostatně pod vedením Ing. Oldřicha Ševečka, Ph.D. a s použitím literatury uvedené v seznamu literatury.

V Brně dne 23. 5. 2019

.....

Ondřej Pánek



# OBSAH

<b>1</b>	<b>ÚVOD.....</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>STRUKTURÁLNÍ OPTIMALIZACE .....</b>	<b>19</b>
2.1	Formulace problému.....	20
2.2	Dělení strukturální optimalizace.....	21
2.2.1	Optimalizace velikosti .....	22
2.2.2	Tvarová optimalizace .....	22
2.2.3	Topologická optimalizace.....	23
2.3	Optimalizační metody.....	24
2.3.1	Metoda Homogenizace .....	24
2.3.2	Metoda SIMP.....	25
2.3.3	Metoda FSD.....	26
2.3.4	Growth metoda pro prutové soustavy.....	28
2.3.5	Metoda CAO.....	30
2.3.6	Metoda SKO .....	32
2.3.7	Metoda ESO .....	33
2.3.8	Metoda BESO.....	33
<b>3</b>	<b>OPTIMALIZACE TOPOLOGIE, TVARU A VELIKOSTI PRUTOVÝCH SOUSTAV.....</b>	<b>37</b>
3.1	Nástroj pro řešení – metoda konečných prvků (MKP).....	38
3.2	Optimalizace průměrů prutů podle dovoleného napětí.....	42
3.3	Topologická optimalizace podle dovoleného napětí .....	44
3.4	Optimalizace poloh styčníků prutových soustav .....	44
3.5	Topologická optimalizace s využitím metody (B)ESO .....	46
3.6	Topologická optimalizace s využitím metody SKO.....	47
3.7	Porovnání výsledků jednotlivých metod .....	48
3.7.1	Most zatížený uprostřed.....	48
3.7.2	Most zatížený ve 3 místech .....	51
3.7.3	Nosník zatížený v pravém dolním rohu.....	52
3.7.4	Nosník zatížený vpravo uprostřed .....	53
<b>4</b>	<b>ZHODNOCENÍ A DISKUZE .....</b>	<b>55</b>
4.1	Celkové zhodnocení .....	56
4.2	Vzájemné zhodnocení jednotlivých skriptů .....	57
<b>5</b>	<b>ZÁVĚR .....</b>	<b>59</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....</b>	<b>61</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....</b>	<b>63</b>
	<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>	<b>65</b>
	<b>SEZNAM TABULEK.....</b>	<b>67</b>
	<b>SEZNAM PŘÍLOH.....</b>	<b>69</b>





# 1 ÚVOD

Topologická optimalizace je nástroj sloužící k získání optimálního tvaru navrhované součásti vzhledem k danému zatížení a okrajovým podmínkám, nejčastěji z hlediska nejmenší hmotnosti nebo největší tuhosti. Optimalizované součásti často připomínají přírodní tvary (např. kosti) a jsou obtížně vyrobitelné konvenčními výrobními metodami (viz obr. 1), což vede k nutnosti tyto tvary upravit pro efektivnější výrobu. Tento problém se ovšem díky rychlému rozvoji 3D tisku stává méně podstatným a topologická optimalizace se tak častěji stává důležitou částí návrhu designu vyráběných součástí. To mě vedlo k vypracování bakalářské práce na téma topologická optimalizace, jejímž cílem je pochopení problematiky, seznámení se se základními metodami topologické optimalizace a jejich otestování na jednoduchých úlohách tak, aby získané poznatky mohly být v budoucnu využity pro řešení složitějších úloh.

V první části této práce je na základě rešerše dostupné literatury zpracován přehled jednotlivých metod strukturální optimalizace a stručně popsán jejich princip. Cílem této kapitoly je seznámení se s jednotlivými metodami a pochopení jejich funkčnosti a případných omezení.

V druhé části práce jsou zvolené metody využity pro topologickou optimalizaci prutových soustav s využitím programovacího prostředí programu MATLAB. Nejdříve bylo třeba vytvořit skript pro výpočet posuvů ve styčnicích a napětí v jednotlivých prutech, na základě kterých probíhá optimalizace. K tomuto účelu byla použita metoda konečných prvků, jejíž princip a průběh výpočtu je zde stručně popsán. Dále bylo vytvořeno 5 optimalizačních skriptů, u kterých jsou popsány způsoby optimalizace, optimalizované parametry, vstupní a výstupní hodnoty.

Skripty určené k topologické optimalizaci jsou následně využity u dvou modelových úloh – mostu a konzolového nosníku, za účelem redukovat jejich hmotnost na minimum při zachování bezpečnosti k mezním stavům pružnosti a vzpěrné stability. Výsledky jednotlivých metod jsou poté mezi sebou porovnány.



Obr. 1: Ukázka výsledného tvaru topologické optimalizace – převzato z [1]



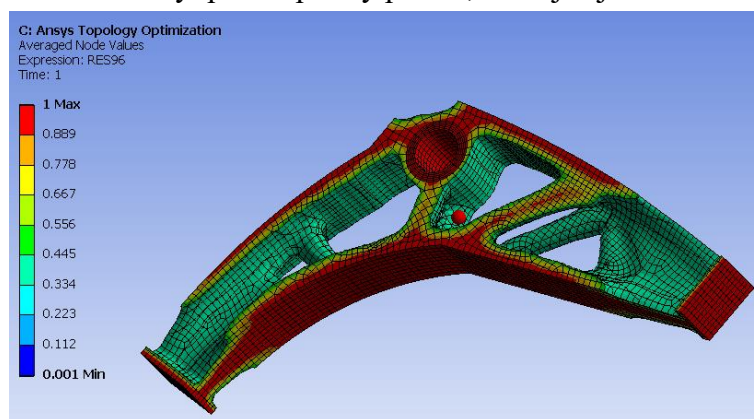
## 2 STRUKTURÁLNÍ OPTIMALIZACE

Rychlý technologický vývoj po druhé světové válce si vyžádal potřebu lehkých a tuhých součástí, zejména v leteckém a automobilovém průmyslu, a optimalizace struktury se stala důležitou součástí návrhu designu [2]. V poslední době se tato metoda dostává i do dalších technologických odvětví díky rostoucímu počtu dostupného softwaru pro topologickou optimalizaci a stejně tak softwaru, který možnost topologické optimalizace zahrnuje jako jednu z dostupných analýz (např. Ansys, Abaqus) [3].

Strukturální optimalizace je proces, kterým se snažíme docílit ideálního rozložení materiálu v návrhovém prostoru optimalizované soustavy tak, aby tato soustava byla plně funkční při zadaném zatížení a zároveň se námi optimalizovaný parametr minimalizoval [3]. Optimalizovanými parametry mohou být například hmotnost, objem, poddajnost, průhyb nebo napětí. Některé z těchto parametrů jsou ovšem protichůdné, a proto je vždy potřeba na počátku definovat optimalizovaný parametr s případným omezením. Typickým zadáním může být například minimalizace hmotnosti soustavy s omezením maximálního průhybu nebo napětí v součásti.

Úlohy strukturální optimalizace bývají ve většině případů řešeny numerickými metodami (např. sekvenční lineární programování, sekvenční kvadratické programování nebo metoda pohybujících se asymptot) [4]. To znamená, že se program na začátku buď pokusí odhadnout výsledný tvar, nebo začne s plným návrhovým prostorem a tento tvar se pak postupně mění, dokud není dosaženo požadovaného designu.

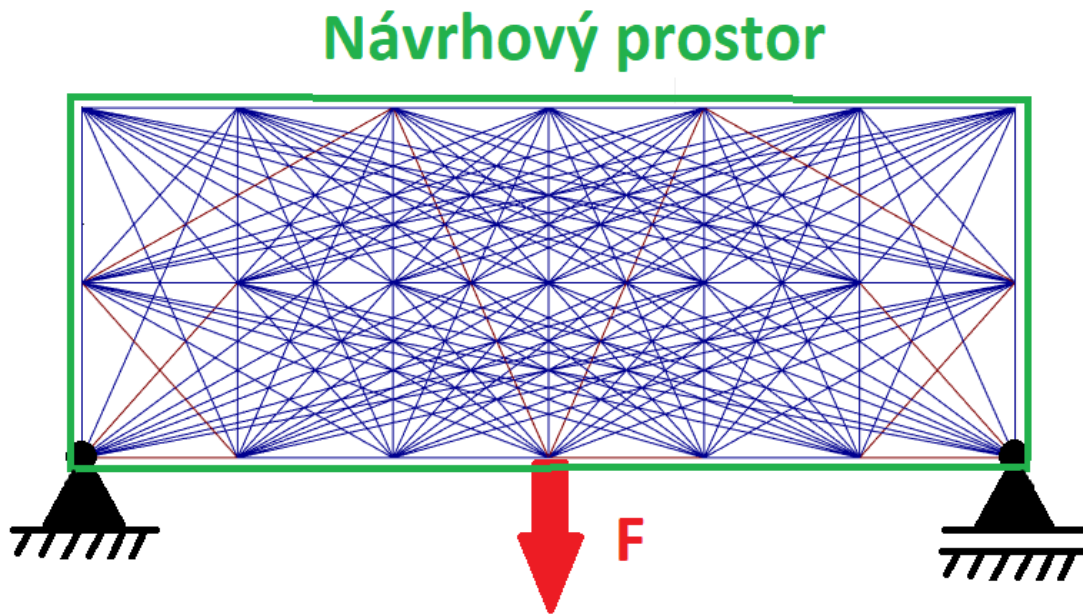
V případě kontinuální struktury je oblast rozdělena na tzv. elementy, které mají ve 2D tvar čtyřúhelníku nebo trojúhelníku [5] (pro 3D úlohy jsou to potom šestistěny, respektive tetraedry) viz obr. 2. Tomuto procesu říkáme síťování. Následně je proveden výpočet pomocí metody konečných prvků a každému jednotlivému elementu soustavy je pak v závislosti na optimalizovaném parametru přiřazen buď reálný materiál, nebo prázdné místo, čehož docílíme např. pomocí odpovídající hustoty  $\rho$  a Youngova modulu pružnosti v tahu  $E$ , respektive  $E = f(\rho)$ . Tj. reálný materiál má vlastnosti  $\rho, E$  a prázdné místo  $\rho \rightarrow 0, E \rightarrow 0$  (řádově poddajnější než reálný materiál). V případě diskrétní struktury (např. prutová soustava) celý proces probíhá stejně jako u kontinua, místo hustoty však může být použit příčný průřez, čímž je zjednodušen výpočet.



Obr. 2: Ukázka síťování pro 3D kontinuální strukturu – převzato z [6].

## 2.1 Formulace problému

Jedním z nejčastěji používaných přístupů je v překladu tzv. návrh minimální poddajnosti („*minimum compliance design*“). Uvažujme optimalizovanou součást jako oblast  $\Omega_m$ , jež je podmnožinou větší oblasti – návrhového prostoru  $\Omega$ , přičemž návrhový prostor  $\Omega$  je zvolen tak, aby umožnil aplikaci zatížení a okrajových podmínek [7]. U optimalizace prutových soustav návrhový prostor nazýváme „*ground structure*“ (dále výchozí struktura) viz obr. 3. Problém optimálního tvaru můžeme převést na problém optimální volby elastického tenzoru  $E_{ijkl}$ , který je proměnnou na oblasti návrhového prostoru. [7]



Obr. 3: Návrhový prostor a výchozí struktura („*ground structure*“) o velikosti 7x3 uzlů pro optimalizaci mostní konstrukce.

Zavedeme vztah (1) pro energii napjatosti tělesa  $\mathbf{a}$  (v rovnovážném stavu  $\mathbf{r}$ , pro libovolný virtuální posuv  $\mathbf{w}$ ), vztah (2) pro linearizované přetvoření  $\mathcal{E}_{ij}$  a vztah (3) pro potenciál vnějšího zatížení  $\mathbf{l}$ , kde  $\mathbf{o}$  je objemové zatížení,  $\mathbf{f}$  vnější zatížení a  $\mathbb{T}$  představuje hranice součásti [7]. Tyto veličiny jsou znázorněny na obr. 4.

$$a(\mathbf{r}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} E_{ijkl}(\mathbf{x}) \mathcal{E}_{ij}(\mathbf{r}) \mathcal{E}_{kl}(\mathbf{w}) d\Omega \quad (1)$$

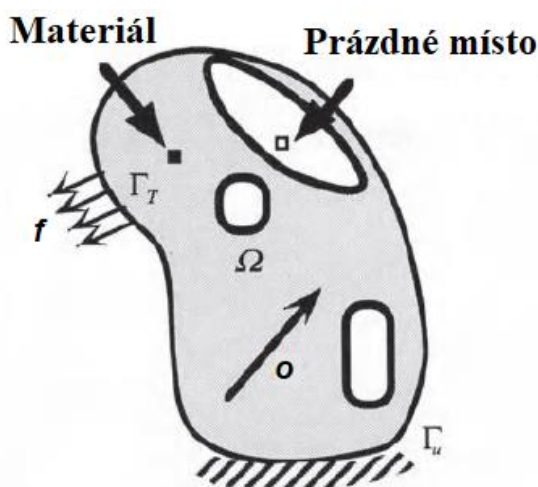
$$\mathcal{E}_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r_i}{\partial x_j} + \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

$$l(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \mathbf{o} \cdot \mathbf{r} dV + \int_{\mathbb{T}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{r} dS \quad (3)$$

Problém minimální poddajnosti pak můžeme zapsat ve tvaru (4), který popisuje minimalizaci potenciálu vnějšího zatížení závislého na vnějším a objemovém zatížení, za podmínky přípustné deformace:

$$\begin{aligned} \min_{r \in P, E} \quad & l(r) \\ \text{za podmínky:} \quad & \\ a_E(r, w) = l(w), \text{ pro všechna } w \in P, \quad & (4) \\ E \in E_{ad} \end{aligned}$$

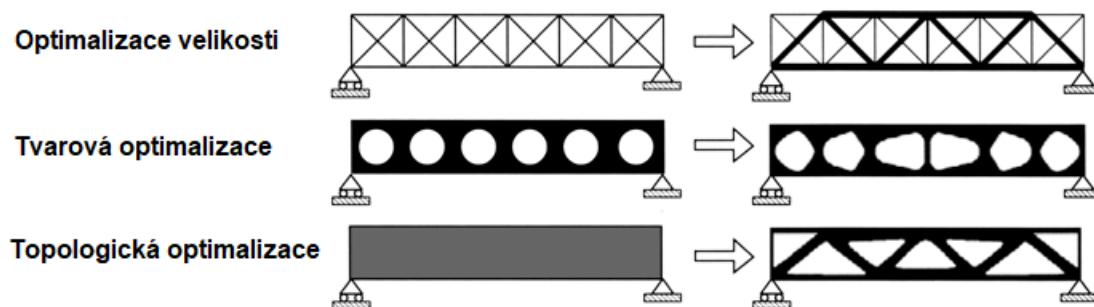
kde  $P$  je množina kinematicky přípustných posuvů a  $E_{ad}$  množina přípustných elastických tenzorů.



Obr. 4: Zobecněný tvar návrhového prostoru při hledání optimálního rozložení materiálu – převzato z [8].

## 2.2 Dělení strukturální optimalizace

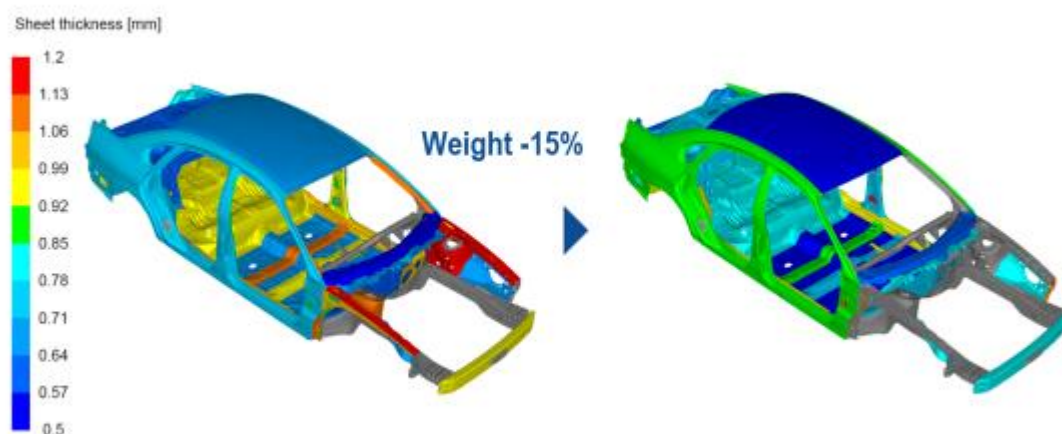
Metody strukturální optimalizace můžeme obecně rozdělit do třech podkategorií – optimalizace velikosti, optimalizace tvaru a topologická optimalizace [2] viz obr. 5.



Obr. 5: Rozdělení strukturální optimalizace – převzato z [9].

### 2.2.1 Optimalizace velikosti

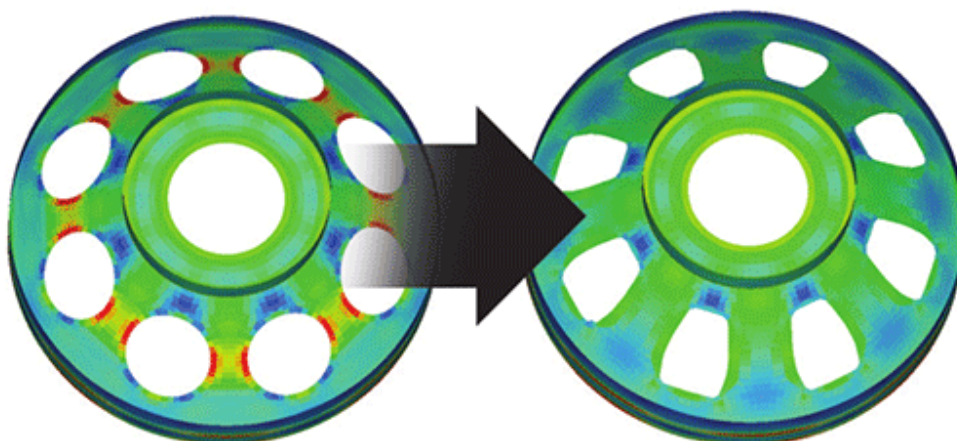
Jedná se o jednoduchou metodu, která vznikla přirozeně a je pravděpodobně nejčastěji používanou metodou v inženýrské komunitě [2]. V této úloze je návrháři předem známý tvar soustavy, neví ale, jak mají být jednotlivé komponenty velké. Typickým příkladem může být prutová soustava, u které je potřeba určit příčné průřezy jednotlivých prutů. Dalším příkladem může být nosník se známou délkou, ale neznámým příčným průřezem nebo tloušťka plechů soustavy [3] viz obr. 6.



Obr. 6: Optimalizace tloušťky plechu u auta – převzato z [10].

### 2.2.2 Tvarová optimalizace

Tvarová optimalizace se zabývá návrhem hranic (povrchu) součástí v případě kontinua, případně souřadnic uzlů u prutových soustav [2, 3]. Používá se pro lokální zlepšení vlastností součástí (například rozložení napětí) viz obr. 7.



Obr. 7: Ukázka tvarové optimalizace otvorů v kole – převzato z [2].



### 2.2.3 Topologická optimalizace

Topologická optimalizace je nejobecnější formou optimalizace struktury zahrnující obě výše zmíněné metody. U optimalizace tvaru a velikosti můžeme jednotlivé komponenty měnit v určitých mezích, nemůžeme je však úplně odebrat [3]. Pokud tedy návrhář neví, jak bude výsledná součást vypadat, je vhodné použít topologickou optimalizaci.

Jejím cílem je zlepšit globální vlastnosti součásti, jako například zvětšení tuhosti nebo snížení hmotnosti [2]. Toho je dosaženo tak, že je návrhová oblast rozdělena na virtuální a reálný materiál. Pro kontinuum je na počátku většinou celý návrhový prostor vyplněn reálným materiálem a v závislosti na optimalizovaném parametru je některým částem sítě přiřazen virtuální materiál, čímž vznikne tzv. „0-1“ design (0– virtuální materiál, 1– reálný materiál) [3]. U 2D kontinua tohoto stavu docílíme přiřazením nulové tloušťky materiálu, u 3D kontinua přiřazením nulové hustoty. U diskrétní struktury jako je například prutová soustava použijeme k získání „0-1“ designu příčný průřez, tj.  $S \rightarrow 0$  znamená virtuální materiál. V celém návrhovém prostoru se tedy iterativně mění materiál v rozmezí 0-1, než je dosaženo požadovaného designu. Příklad výsledného tvaru topologické optimalizace je znázorněn na obr. 8.

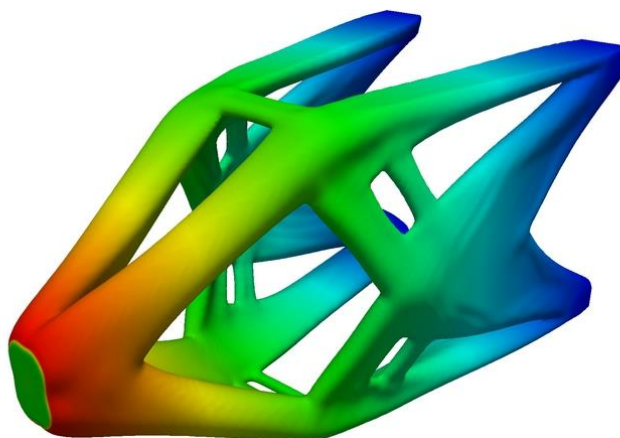
Metody topologické optimalizace můžeme dále rozdělit ještě do 2 skupin [3]:

#### Metody optimálního kritéria

Jedná se o nepřímé metody optimalizace, jejichž cílem je splnit předem stanovená kritéria (například požadovaná hmotnost nebo maximální průhyb součásti). Tyto metody jsou často založeny na Kuhn-Tuckorově podmínce optimality, což má za následek jejich vyšší přesnost a dosažení opravdu optimálního tvaru [3]. Jsou vhodné pro řešení málo omezených úloh s mnoha designovými proměnnými. Mezi tyto metody patří například metoda SIMP nebo „*Growth*“ metoda pro prutové soustavy.

#### Heuristické a intuitivní metody

Tyto metody jsou odvozené z pozorování inženýrských a přírodních procesů. Nezaručují sice optimální výsledek, ale vznikají z nich tvary vhodné do výroby (především pomocí 3D tisku) [3]. Mezi tyto metody patří například FSD, CAO, SKO, (B)ESO.



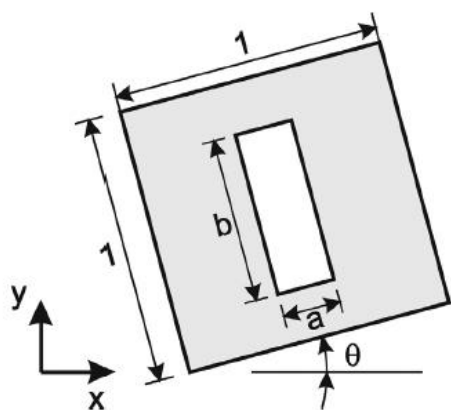
Obr. 8: Topologická optimalizace nosníku metodou SIMP 180x180x360 uzlů – převzato z [11].

## 2.3 Optimalizační metody

V této kapitole jsou popsány principy některých často používaných optimalizačních metod. U vybraných metod je popsán i výpočetní algoritmus.

### 2.3.1 Metoda Homogenizace

Jedná se o kombinaci topologické a tvarové optimalizace. Myšlenkou této metody je, že se materiál skládá z nekonečného množství mikroductin, jejichž tvar a rozložení je potřeba najít [3]. Postup je takový, že se návrhový prostor rozdělí na konečné prvky, aplikuje zatížení, okrajové podmínky a je proveden výpočet. Použijeme-li pro síťování čtvercové buňky, každá z těchto buněk bude mít jeden typ mikrostruktury [3] (pro izotropní materiál je tento tvar znázorněn na obr. 9). Na základě výpočtu je pak každému prvku přiřazena velikost mikroductiny tak, aby se optimalizovaný parametr minimalizoval.



Obr. 9: Jednotková buňka s mikrootvorem o rozměrech  $a$  a  $b$  pro izotropní materiál – převzato z [3].

Rozměry  $a$  a  $b$  nabývají hodnot  $< 0,1 >$ , přičemž pro hodnoty  $a, b = 0$  se jedná o reálný materiál a pro hodnoty  $a, b = 1$  se jedná o mikroductinu. V případě, že se v části struktury nevyskytují žádné mikroductiny, jedná se o reálný materiál. V případě, že se v části struktury vyskytují pouze mikroductiny, materiál zde není umístěn. Ukázky výsledných tvarů jsou znázorněny na obr. 10.



Obr. 10: Ukázka optimalizovaných tvarů získaných metodou homogenizace – převzato z [12].



### 2.3.2 Metoda SIMP

Celý název této metody „*Solid Isotropic Material with Penalization*“ lze přeložit jako pevný izotropní materiál s penalizací. Formuloval ji M. P. Bendsoe v roce 1989 a dodnes se jedná o nejpublikovanější a nepoužívanější metodu topologické optimalizace [13]. Je při ní použita pouze jedna proměnná  $\rho_e$  pro každý prvek, která značí virtuální hustotu materiálu v jednotlivých prvcích (tj. poměr reálného materiálu v prvku vzhledem k objemu prvku). Její hodnota se pohybuje v rozsahu  $\langle \rho_{min}; \rho_{max} \rangle$ , kde  $\rho_{min} > 0$  (obvykle nabývá hodnoty  $10^{-3}$ ) a  $\rho_{max} = 1$  [13]. Pomocí této proměnné pak můžeme popsat modul pružnosti v tahu prvku  $E_e$  vztahem (5)

$$E_e = \rho_e^p \cdot E_e^0 \quad (5)$$

kde  $p$  je penalizační faktor, jehož cílem je penalizovat hodnoty  $\rho_e$  a  $E_e^0$  je původní modul pružnosti v tahu [13].

Pro získání jasného rozlišení mezi reálným a virtuálním materiálem (tzv. „0–1“ design) je obvykle nutné použít hodnotu penalizačního faktoru  $p > 3$  [3]. První výpočet se provede pro  $p = 1$ , poté se zvýší na uživatelem definovanou hodnotu a proces probíhá iteračně, dokud není dosaženo „0–1“ designu [3]. Tento proces je možné popsat vztahem (6) převzatým ze zdroje [3], kde se minimalizuje poddajnost struktury:

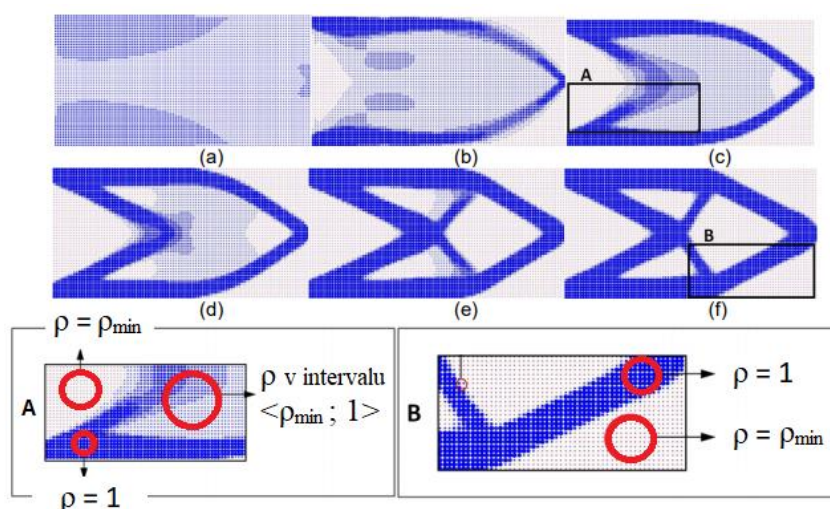
$$\min \quad C(\rho_e) = \{\mathbf{F}\}^T(\mathbf{u})$$

za podmíněk:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{e=1}^N \rho_e^p \mathbf{K}_e \right) \{\mathbf{u}\} &= \{\mathbf{F}\} \\ \left( \sum_{e=1}^N v_e \rho_e \right) &\leq V_s \end{aligned} \quad (6)$$

kde  $C$  je poddajnost součásti,  $V_s$  je maximální objem prvku,  $N$  je počet konečných prvků, a  $v_e$  je objem e-tého prvku,  $\mathbf{K}_e$  je matice tuhosti e-tého prvku a  $\mathbf{F}$  je matice zatížení.

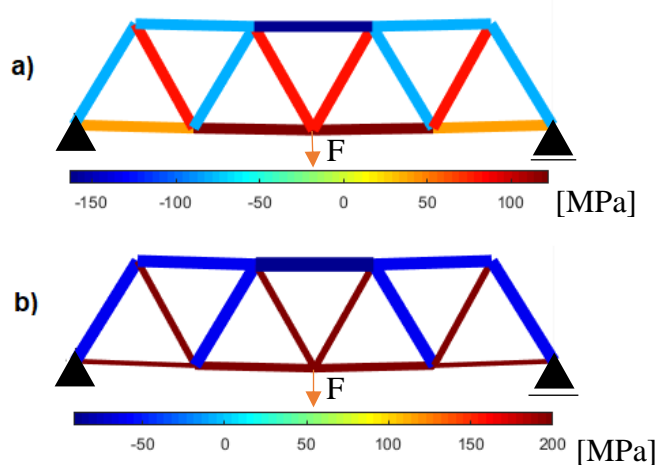
Aplikací této metody na 2D kontinuum často vznikají struktury připomínající prutovou soustavu (viz obr. 11).



Obr. 11: Proces optimalizace konzolového nosníku uchyceného vetknutím v levém konci a zatíženého uprostřed pravého konce metodou SIMP – převzato z [14].

### 2.3.3 Metoda FSD

Celý název této metody „Fully Stressed Design“ lze přeložit jako plně zatížený design. Jedná se o velice intuitivní metodu, kterou je možno zařadit jak do kategorie optimalizace velikosti, tak do kategorie topologická optimalizace. Jejím cílem je zařídit, aby všechny členy soustavy byly zatíženy maximálním přípustným napětím alespoň v jednom ze zátěžných stavů, tedy v jednotlivých členech soustavy je dosaženo homogenního napětí viz obr.12 [3]. To znamená, že z prvků, které nejsou plně zatíženy se materiál ubírá, zatímco přetíženým prvkům se materiál přidává. Tento proces můžeme popsat vývojovým diagramem převzatým ze zdroje [3], který je zobrazen na další straně. Z vývojového diagramu vyplývá, že je metoda vhodná jak pro aplikaci na kontinuální strukturu (např. tloušťka plechu), tak pro prutové soustavy. V případě, že je soustava staticky určitá, je dosaženo hodnoty maximálního napětí ve všech prvcích během jedné iterace [3]. Takový případ je znázorněn na obr.12.



Obr. 12: Napětí jednotlivých prutů mostní konstrukce uchycené pomocí rotační a posuvné rotační vazby na krajích a zatížené uprostřed a) před, b) po optimalizaci metodou FSD.

Definice optimalizované soustavy, okrajových podmínek, zatížení a rozdělení soustavy na  $N$  konečných prvků (pruty, nosníky, plošné/objemové prvky), specifikace maximálního dovoleného napětí  $\sigma^{dov}$  (toto napětí může být stejné nebo různé pro tah a tlak).

Výpočet napětí v jednotlivých elementech (např. prutech) optimalizované soustavy (nejčastěji pomocí metody konečných prvků).

Přirazení proměnné jednotlivým prvkům dle následujících vztahů (7) a (8) (pro jednodušší pochopení je uveden vztah pro prutové soustavy, místo plochy průřezu  $A$  si ale můžeme představit například tloušťku plechu):

$$q_j^i = \max\left(\frac{\sigma_j^i}{\sigma_j^{dov}}\right) \quad (7)$$

$$A_j^{i+1} = A_j^i \cdot q_j^i \quad (8)$$

kde  $i$  značí číslo aktuální iterace,  $j$  značí číslo upravovaného prvku a  $q$  je poměr mezi aktuálním napětím  $\sigma$  a dovoleným napětím  $\sigma^{dov}$ . Uvažujeme-li úlohu jako optimalizaci velikosti, jsme omezeni shora i zdola hodnotou průřezu. Pak v případě, že je průřez  $A$  menší než minimální průřez  $A^{min}$ , je průřezu nastavena minimální hodnota. V případě, že je průřez  $A$  větší než maximální průřez  $A^{max}$ , je průřezu  $A$  nastavena maximální hodnota.

Bylo dosaženo maximálního počtu iterací, požadované hodnoty optimalizovaného parametru nebo omezujícího kritéria?

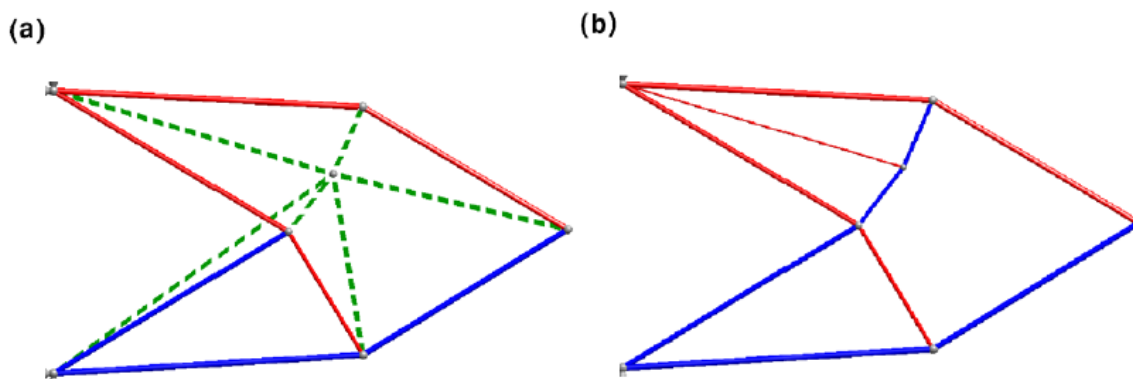
NE

ANO

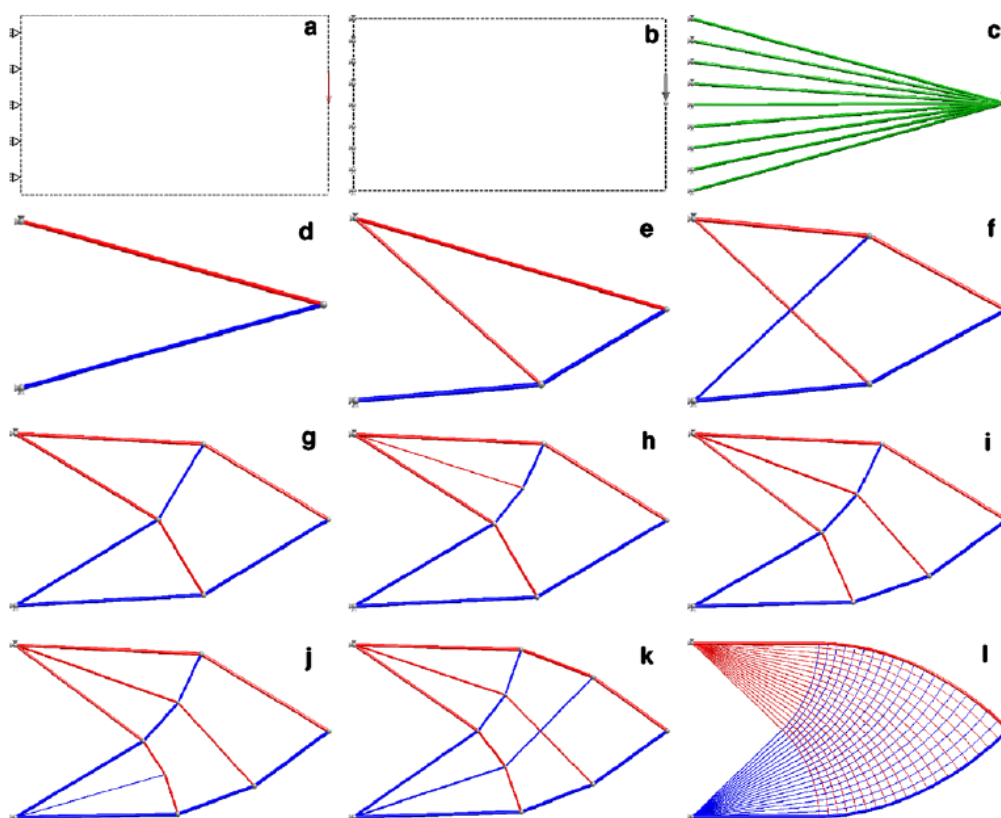
Konec

### 2.3.4 Growth metoda pro prutové soustavy

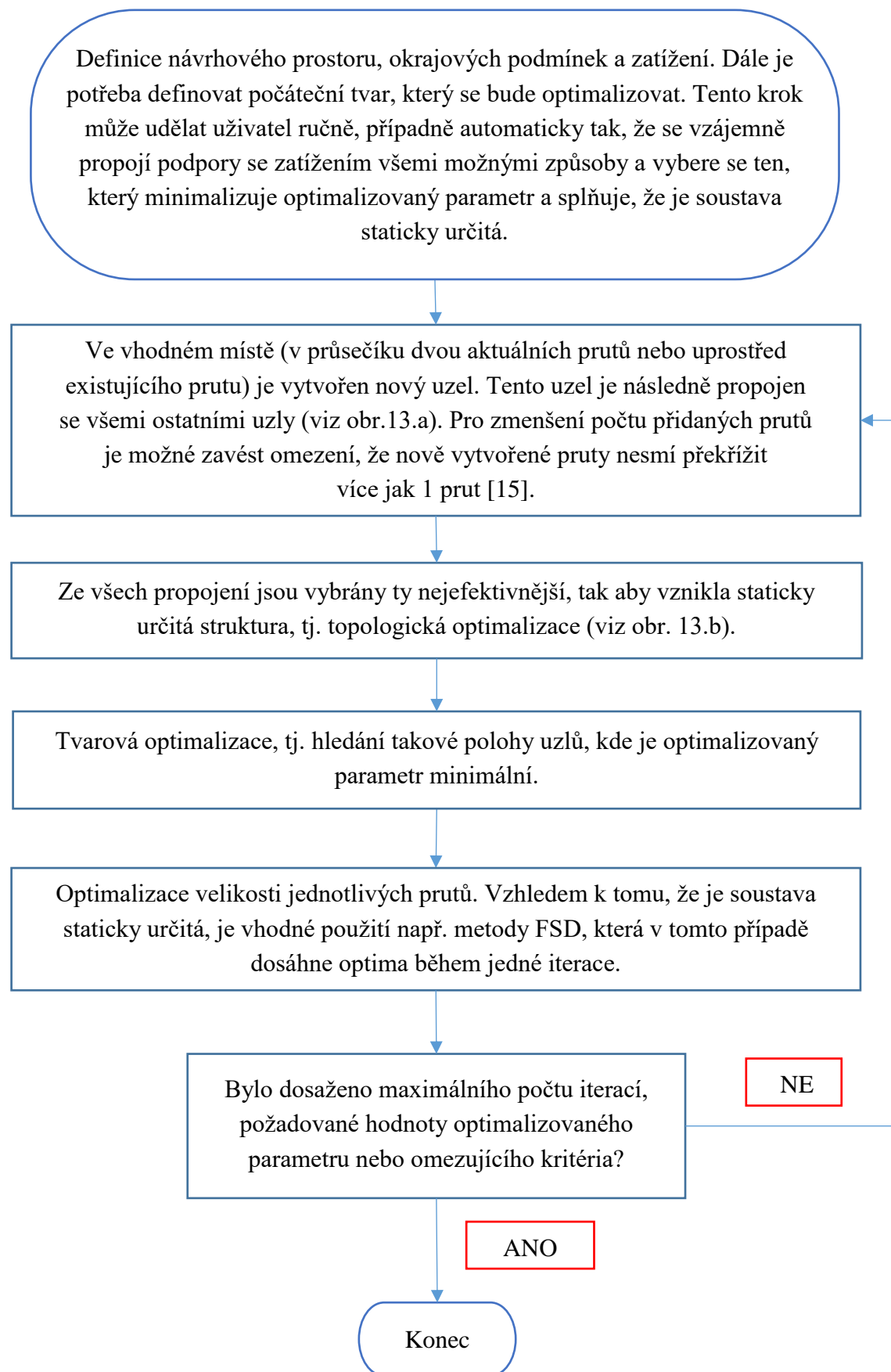
Název této metody lze přeložit jako růst prutové soustavy. Skládá se ze všech tří úloh strukturální optimalizace (tj. optimalizace velikosti, optimalizace tvaru a topologické optimalizace). Optimalizovaným parametrem je nejčastěji průhyb v uživatelem definovaném místě. Její průběh můžeme popsat vývojovým diagramem převzatým ze zdroje [15], který je zobrazen na další straně. Průběh optimalizace je znázorněn na obr.14.



Obr. 13: a) Vytvoření nového uzlu a projení s ostatními uzly, b) Výběr prutů, které minimalizují optimalizovaný parametr – převzato z [15].



Obr. 14: Průběh optimalizace konzolového nosníku, zatíženého uprostřed pravého konce, „growth“ metodou, kde je a) návrhový prostor, b) výchozí styčníky, c) výchozí struktura, d) optimální výchozí struktura, e) - l) optimální tvar pro 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 399 přidanych styčníků – převzato z [15].

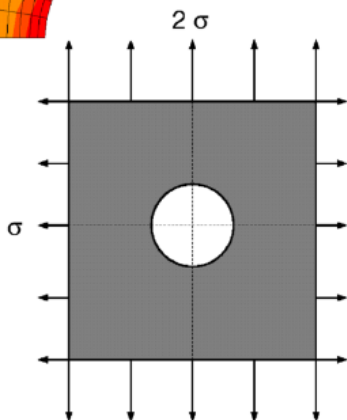
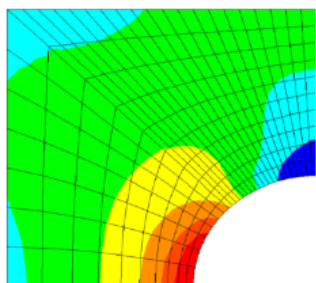


### 2.3.5 Metoda CAO

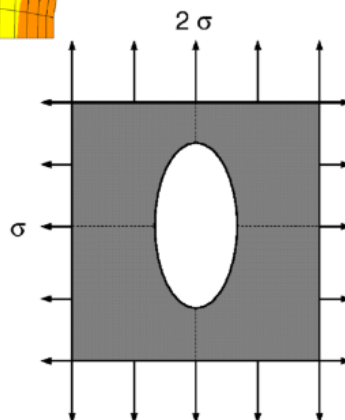
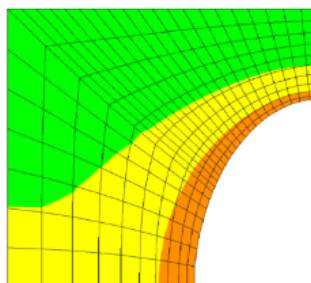
Celý název této metody „*Computer-Aided Shape Optimization*“ lze přeložit jako počítačem řízená tvarová optimalizace. Běžně se nepoužívá pro optimalizaci celého objemu součástí, ale pouze pro vyhlazení lokálních napěťových špiček v uživatelem předem definovaných místech (viz obr.15), respektive na povrchu optimalizované součásti [16]. Je inspirována růstem přírodních objektů (například stromy, kosti) [16].

Změny tvaru povrchu je zde dosaženo bobtnáním, respektive smršťováním optimalizované součásti v závislosti na rozložení napětí, které se vypočítá metodou konečných prvků pro reálné a pseudo-termální zatížení [3]. Proces optimalizace můžeme popsat vývojovým diagramem převzatým ze zdroje [3], který je znázorněn na další stránce.

**Rozložení napětí na desce s kruhovým otvorem**



**Rozložení napětí na desce s optimalizovaným otvorem**



Obr. 15: Optimalizace kruhového otvoru na desce metodou CAO – převzato z [17].

Vytvoření 2 modelů součásti, definice okrajových podmínek, zatížení a rozdělení na konečné prvky. První model popisuje skutečnou součást a použije se pro strukturální analýzu se skutečným zatížením a podporami. Druhý model popisuje virtuální součást s podporami umožňujícími požadované bobtnání, kterého je docíleno termálním zatížením povrchu (v místech vysokého napětí je povrch horký, v místech nízkého napětí studený). Dále je tomuto modelu nastaven modul pružnosti na 1/400 hodnoty prvního modelu a koeficient růstu, který je nenulový pouze na povrchu [3].

Výpočet napětí v prvním modelu.

Na základě výpočtu napětí v prvním modelu jsou druhému modelu přiřazeny teploty pomocí vztahu (9) a je provedena termální analýza.

$$T_n = T_{ref} + k_1 \frac{(\sigma_n - \sigma_{ref})}{\sigma_{ref}} \quad (9)$$

kde  $n$  je číslo uzlu sítě konečných prvků,  $T_{ref}$  je referenční teplota (zvolí si uživatel),  $\sigma_n$  je napětí  $n$ -tého uzlu,  $\sigma_{ref}$  je cílená hodnota napětí,  $k_1$  je měřítko (obvykle 100) a  $T_n$  je teplota, která bude aplikována do  $n$ -tého uzlu

Souřadnice uzlů obou modelů se upraví na základě výsledku termální analýzy tak, že k původním uzlům přičteme termální deformaci pronásobenou vhodným měřítkem.

Bylo dosaženo maximálního počtu iterací, požadované hodnoty optimalizovaného parametru nebo omezujícího kritéria?

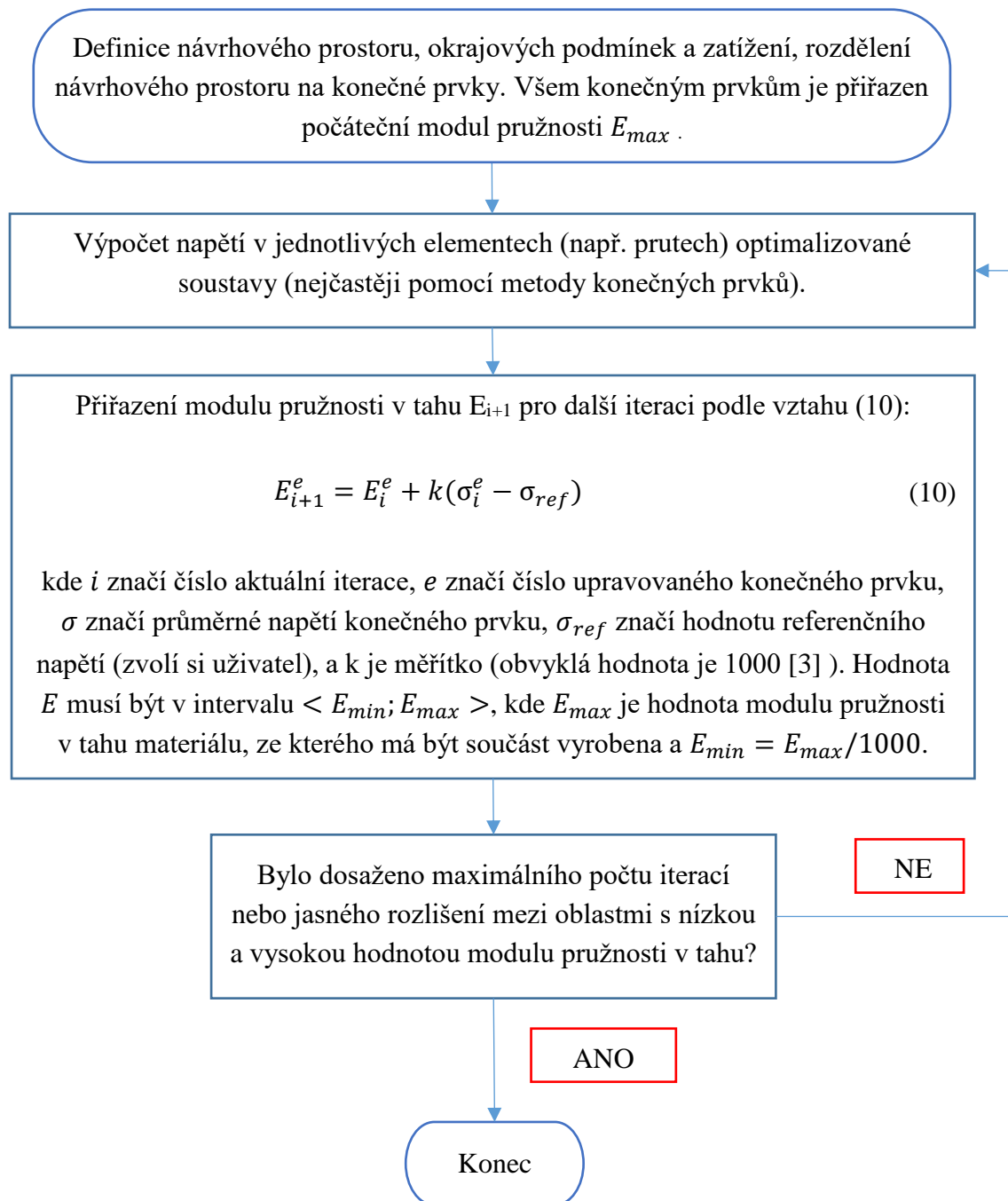
NE

ANO

Konec

### 2.3.6 Metoda SKO

Celý název této metody „*Soft Kill Option*“ lze přeložit jako pozvolné odstraňování materiálu. Inspiruje se přírodními procesy podobně jako CAO (mineralizace kostí), ale na rozdíl od ní probíhá v celém objemu součásti. Jedná se o jednoduchou efektivní metodu, v praxi často používanou v kombinaci s postprocessingem v podobě CAO [18]. Proces optimalizace funguje na principu změny modulu pružnosti v tahu jednotlivých konečných prvků a můžeme ho popsat níže uvedeným vývojovým diagramem převzatým ze zdroje [3]. Tato metoda se běžně používá pro kontinuální strukturu, je ale možné ji aplikovat i na prutové soustavy s dobrými výsledky (viz kapitola 3.5).





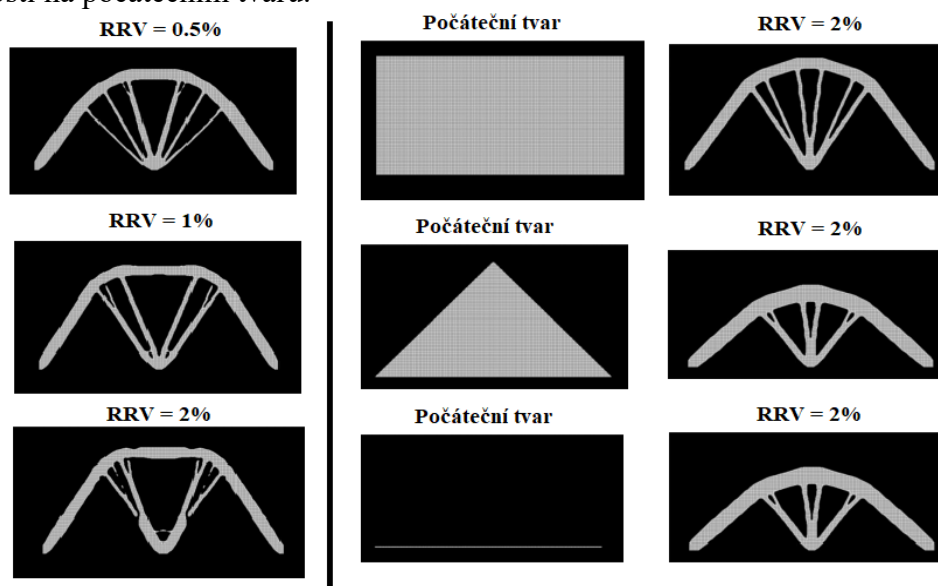
### 2.3.7 Metoda ESO

Celý název této metody „*Evolutionary Structural Optimization*“ lze přeložit jako vyvíjející se struktura. Jedná se o jednoduchou a přímočarou metodu, která byla poprvé představena v roce 1992 [19]. Funguje na principu postupného (iteračního) odstraňování neefektivního materiálu podle uživatelem určeného kritéria (např. napětí, posuvy nebo vlastní frekvence). Vývojový diagram převzatý ze zdroje [3], který je umístěn na straně 32 popisuje optimalizaci podle redukovaného napětí.

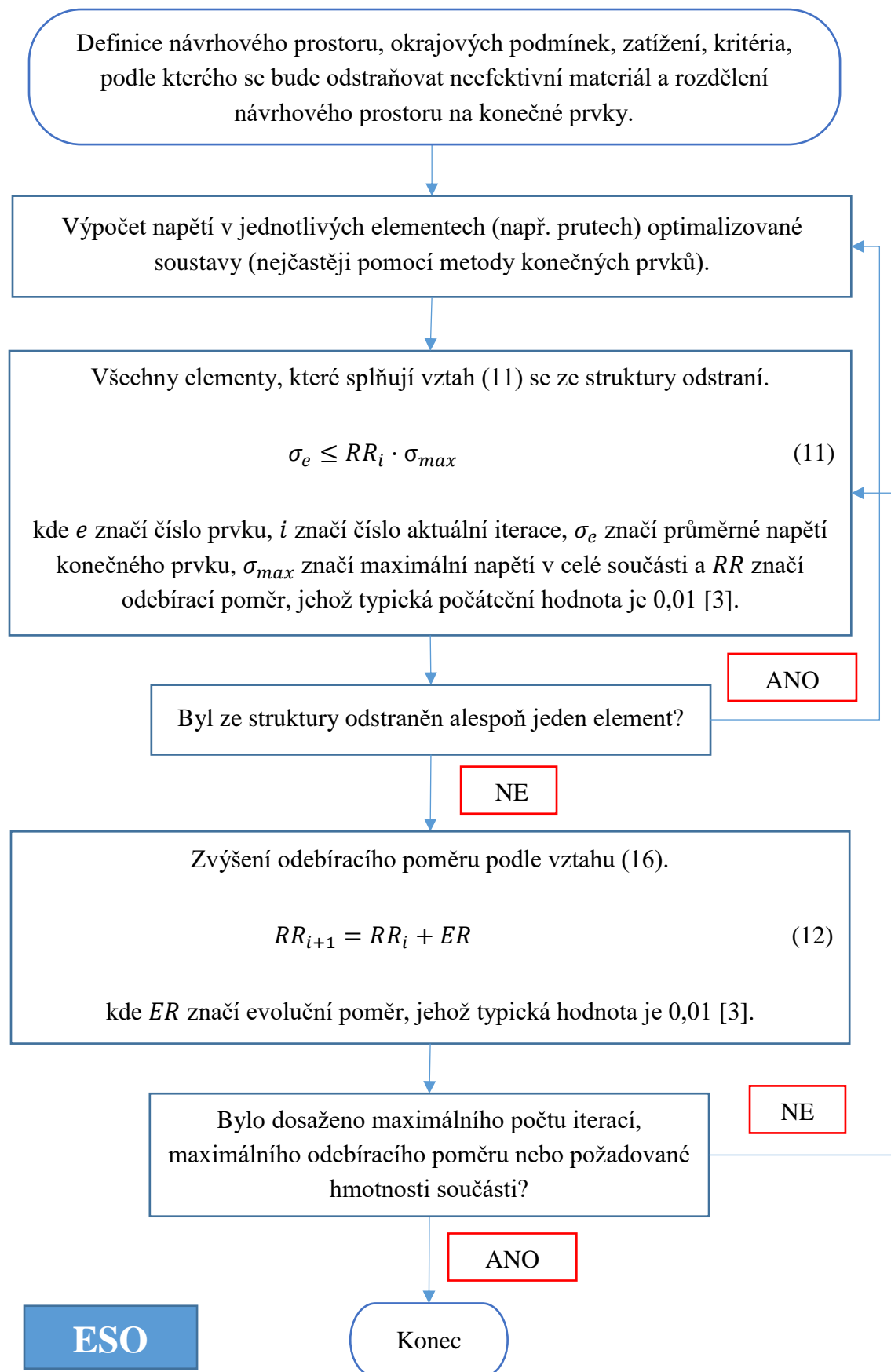
Problémem této metody je, že odstranění materiálu je definitivní. Tj. v prvních iteracích mohou být odstraněny důležité prvky, které už se do struktury nemohou vrátit. V levé části obr.16 jsou znázorněny výsledky metody ESO pro různé objemové odebírací poměry RRV (při každé iteraci je odebráno toto procento materiálu ze součásti vzhledem k návrhovému prostoru) [20]. Je patrné, že pro vyšší hodnoty RRV je dosaženo méně přesného tvaru.

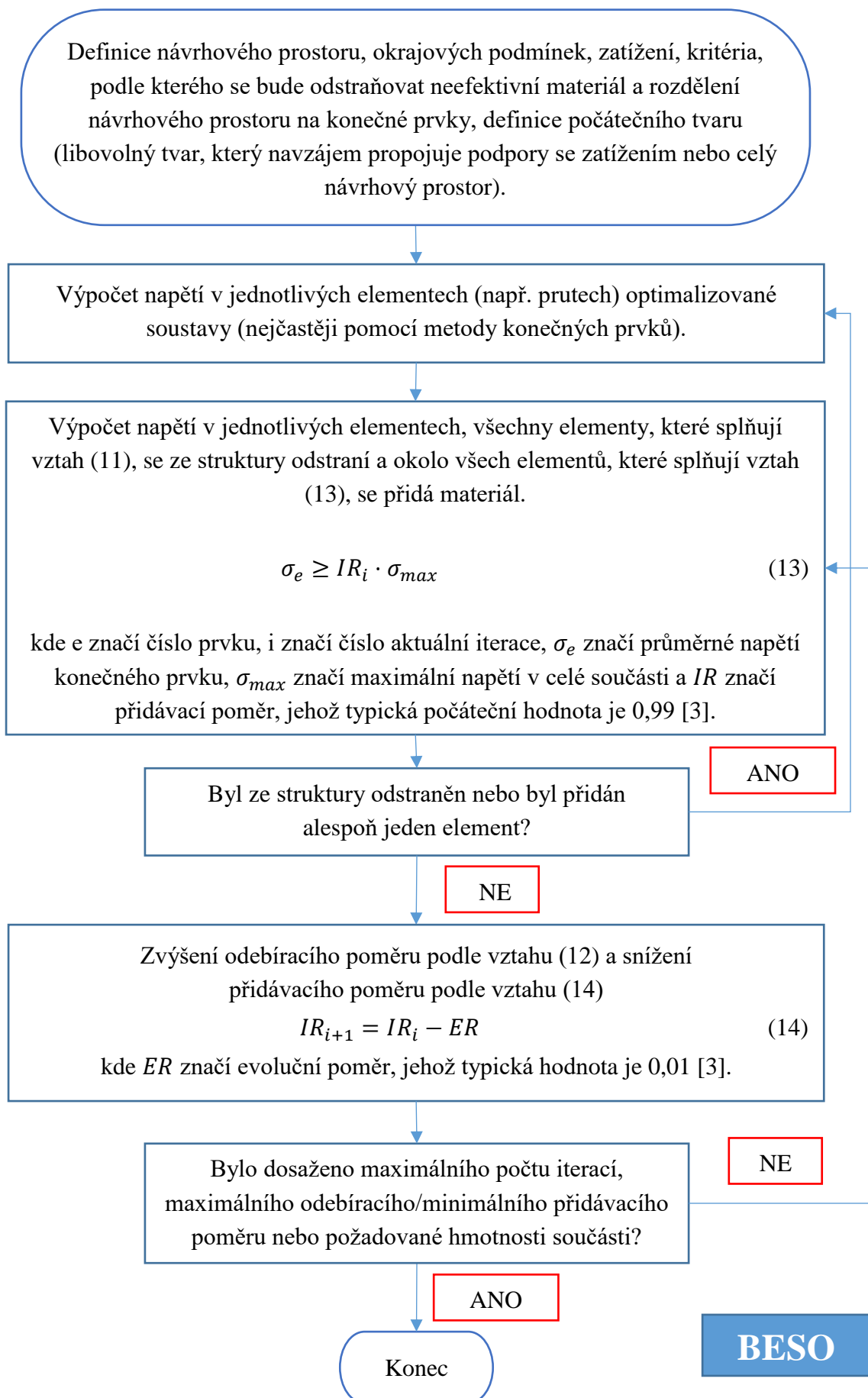
### 2.3.8 Metoda BESO

Celý název této metody „*Bilinear Evolutionary Structural Optimization*“ lze přeložit jako obousměrně vyvíjející se struktura. Funguje na stejném principu jako výše zmíněná metoda ESO, je pouze doplněna o krok, ve kterém se přidává materiál, což částečně řeší zmíněný nedostatek metody ESO. Vzhledem k možnosti obousměrného přidávání materiálu není nutné začínat výpočet s celým vyplněným návrhovým prostorem (prvky sice existují, nejsou ale zahrnuty do výpočtu), což může ušetřit výpočetní čas. Vývojový diagram převzatý ze zdroje [3], který je uveden na straně 33 popisuje optimalizaci podle redukovaného napětí. V pravé části obr.16 jsou znázorněny výsledky metody BESO pro různé počáteční tvary. RRV zde značí procento přerozděleného materiálu vzhledem k návrhovému prostoru. Přesného tvaru je dosaženo i při vyšších hodnotách RRV s malou závislostí na počátečním tvaru.



Obr. 16: Optimalizace nosníku uchyceného rotačními vazbami na spodních okrajích a zatíženého uprostřed, vlevo metodou ESO, vpravo metodou BESO – převzato z [20].





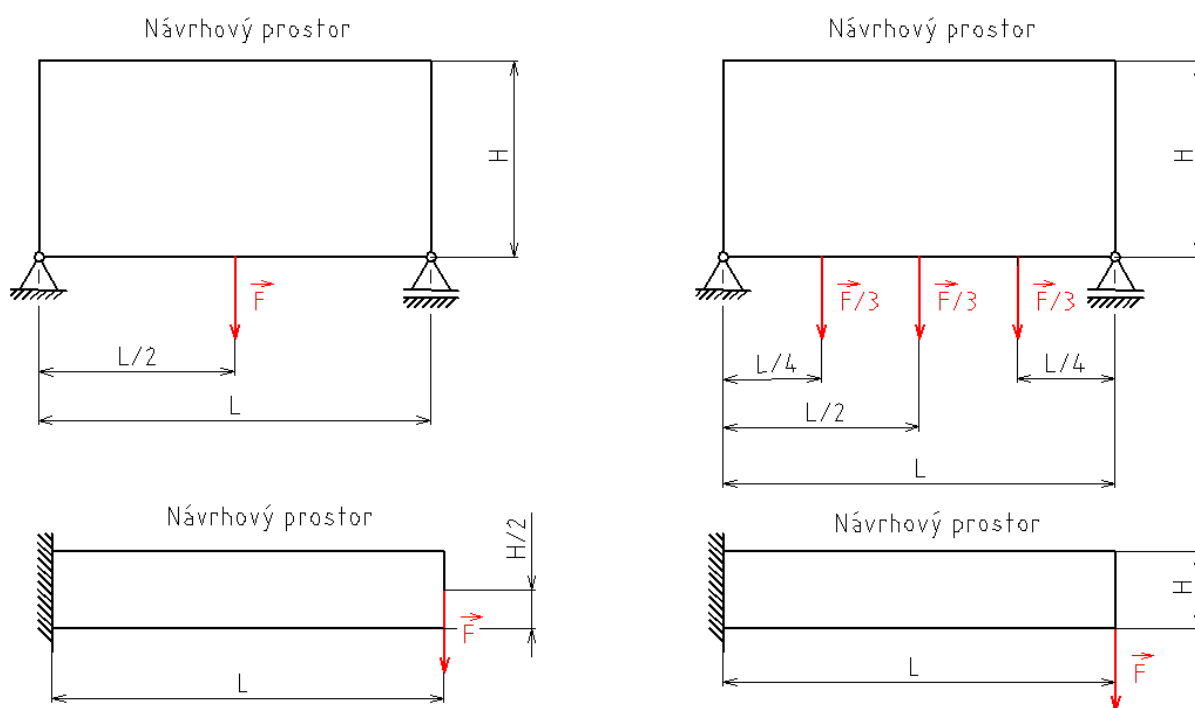


### 3 OPTIMALIZACE TOPOLOGIE, TVARU A VELIKOSTI PRUTOVÝCH SOUSTAV

Tato část bakalářské práce se zabývá tvorbou skriptů pro optimalizaci prutových soustav. K tomuto účelu byly použity vybrané metody, jejichž algoritmy a výsledky jsou popsány níže. Z důvodu možného porovnání výsledků mezi jednotlivými metodami byly zvoleny dvě modelové úlohy (most a nosník) zatížené dle obr.17.

Skripty pro výpočet napětí a optimalizaci jsou vytvořeny v programu MATLAB, což je program na bázi programovacího jazyka Fortran sloužící k vědeckým a technickým výpočtům, analýze dat, vizualizaci a vývoji algoritmů. Pro kontrolu vypočtených napětí byl použit software ANSYS Classic, což je software pro různé druhy inženýrských simulací.

Při výpočtech předpokládám izotropní, lineárně elastický materiál, malé deformace, lineární vazby a lineární závislost mezi silovým působením a deformačními charakteristikami. Ve všech případech jsou optimalizovány pouze prutové soustavy, pro výpočet jsou tedy použity osově zatížené prutové prvky (v prostředí ANSYSu „LINK180“).



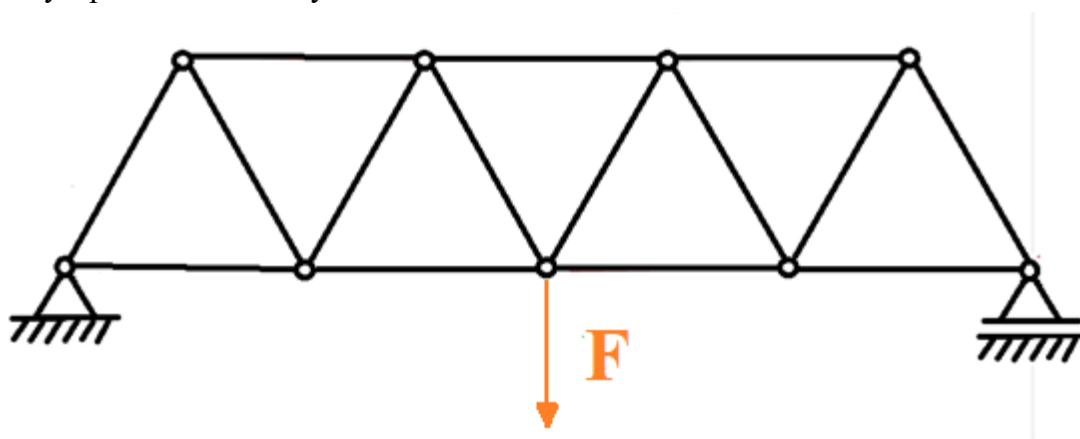
Obr. 17: Schématické zakreslení modelových úloh.

### 3.1 Nástroj pro řešení – metoda konečných prvků (MKP)

Za účelem výpočtu posuvů a napětí v jednotlivých prvcích prutové soustavy byl v prostředí programu MATLAB vytvořen skript MKP.m. Algoritmus tohoto skriptu je základem všech optimalizačních skriptů, které byly v rámci této bakalářské práce vytvořeny. K výpočtu posuvů a napětí je použita metoda konečných prvků. V popisu postupu výpočtu je uveden i stručný popis metody konečných prvků, zjednodušený pro 2D osově zatížené prutové prvky.

#### Vstupní hodnoty

Ve výchozím nastavení je skript nastaven pro výpočet mostu zatíženého uprostřed s pruty uspořádanými do trojúhelníků (viz obr. 18). Uživatel zadá délku a výšku konstrukce, příčný průřez prutů, materiálové vlastnosti a zátěžnou sílu. Program lze modifikovat na libovolné zadání, v takovém případě je nutné přepsat souřadnice uzlů, okrajové podmínky a pozici zátěžné síly.



Obr. 18: Znáznornění řešené úlohy.

#### Výpočet

Výpočet je proveden pomocí základní rovnice metody konečných prvků (15), která je odvozena z Lagrangeova variačního principu, tj. „Mezi všemi funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují geometrické okrajové podmínky, se realizují ty, které udělají celkové potenciální energii stacionární hodnotu.“ [21].

$$K * U = f \quad (15)$$

kde  $K$  je matice tuhosti,  $U$  je matice posuvů a  $f$  je matice vnějšího zatížení

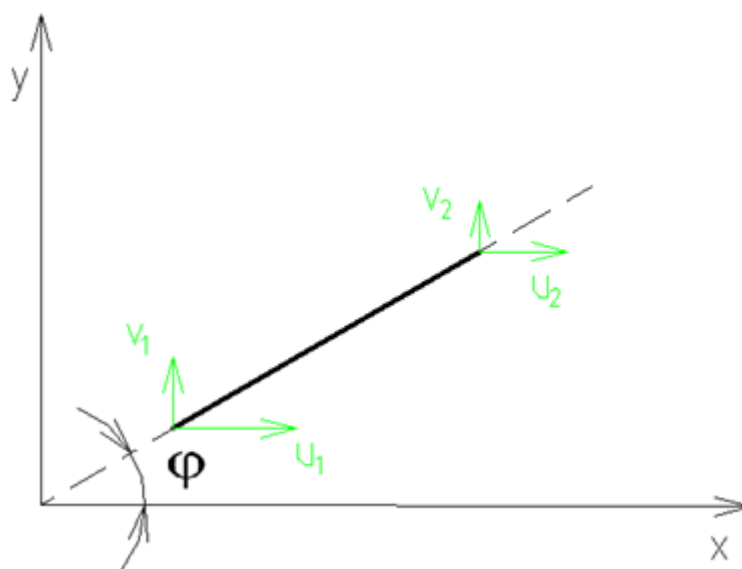
V našem případě je tedy neznámou pouze matice posuvů, kterou vypočítáme pomocí vztahu (16).

$$U = K^{-1} * f \quad (16)$$

Pro výpočet je potřeba sestavit globální matici tuhosti. Nejdříve se postupně pro každý prvek sestaví prvková matice tuhosti  $\mathbf{K}_e$  transformovaná do globálního souřadného systému. Výpočet prvkové matice tuhosti je popsán vztahem (17). Tato matice má rozměry  $4 \times 4$  (tj. pro každý uzel 2 stupně volnosti –  $u, v$ )

$$\mathbf{K}_e = \frac{A * E}{L} \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{41} & \cdots & k_{44} \end{bmatrix} \quad (17)$$

kde  $A$  je příčný průřez,  $E$  je modul pružnosti v tahu,  $L$  je délka příslušného prvku,  $\varphi$  je kladný úhel, který prvek svírá s globální osou  $x$  (viz obr. 19) a  $c = \cos(\varphi)$ ,  $s = \sin(\varphi)$ .



Obr. 19: Prvek spojující uzly 1 a 2.

Jednotlivé prvky prvkové matice tuhosti jsou pak přiřčeny k příslušné pozici globální matice tuhosti. Pro znázornění tohoto postupu je použitý prvek propojující uzly  $i$  a  $j$ , platí že  $1 < i < j < n$ , kde  $n$  je počet uzlů. Globální matice tuhosti má tedy rozměry  $2n \times 2n$  (viz obr. 20).

Tato matice je ale singulární, tj. neexistuje k ní inverzní matice a soustava nejde vyřešit. Tento problém se odstraní tak, že se využijí okrajové podmínky, které udávají, ve kterých uzlech jsou posuvy nulové. To znamená, že v matici zatížení, která se skládá z velikostí zatížení v jednotlivých uzlech ve směrech  $u$  a  $v$ , mající rozměry  $2n \times 1$ , se odstraní řádky, ve kterých jsou posuvy nulové. Z matice tuhosti jsou také odstraněny stejné řádky, navíc ale ještě sloupce.

Například pro takovou okrajovou podmínku, že posuvy  $u, v$  jsou v prvním uzlu nulové (v mém případě tato okrajová podmínka znázorňuje rotační vazbu) bude odstraněn první a druhý řádek globální matice tuhosti, první a druhý sloupec globální matice tuhosti, první a druhý řádek matice zatížení. Pro další okrajové podmínky jsou odstraněny řádky a sloupce analogickým postupem.

$$K_e = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \text{2i-1} & \text{2i} \\ k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{2j-1} & \text{2j} \\ k_{13} & k_{14} \\ k_{23} & k_{24} \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{2i-1} \\ \text{2i} \\ \text{2j-1} \\ \text{2j} \end{matrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1(2i-1)} & k_{1(2i)} & \dots & k_{1(2j-1)} & k_{1(2j)} & \dots & k_{1(2n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(2i-1)1} & \dots & k_{(2i-1)(2i-1)} & k_{(2i-1)(2i)} & \dots & k_{(2i-1)(2j-1)} & k_{(2i-1)(2j)} & \dots & k_{(2i-1)(2n)} \\ k_{(2i)1} & \dots & k_{(2i)(2i-1)} & k_{(2i)(2i)} & \dots & k_{(2i)(2j-1)} & k_{(2i)(2j)} & \dots & k_{(2i)(2n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(2j-1)1} & \dots & k_{(2j-1)(2i-1)} & k_{(2j-1)(2i)} & \dots & k_{(2j-1)(2j-1)} & k_{(2j-1)(2j)} & \dots & k_{(2j-1)(2n)} \\ k_{(2j)1} & \dots & k_{(2j)(2i-1)} & k_{(2j)(2i)} & \dots & k_{(2j)(2j-1)} & k_{(2j)(2j)} & \dots & k_{(2j)(2n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & k_{(2n)(2n)} \end{bmatrix}$$

Obr. 20: Přiřazení členů prvkové matice do globální matice tuhosti.

Nyní může být vytvořena inverzní matice k matici  $K$  a proveden výpočet posuvů pomocí vztahu (16), čímž získáme posuvy v jednotlivých uzlech. Ve vzniklé matici posuvů ale chybí řádky s okrajovými podmínkami, které se musí do této matice přidat. Pomocí vztahu (18) je pak vypočteno napětí v jednotlivých prutech.

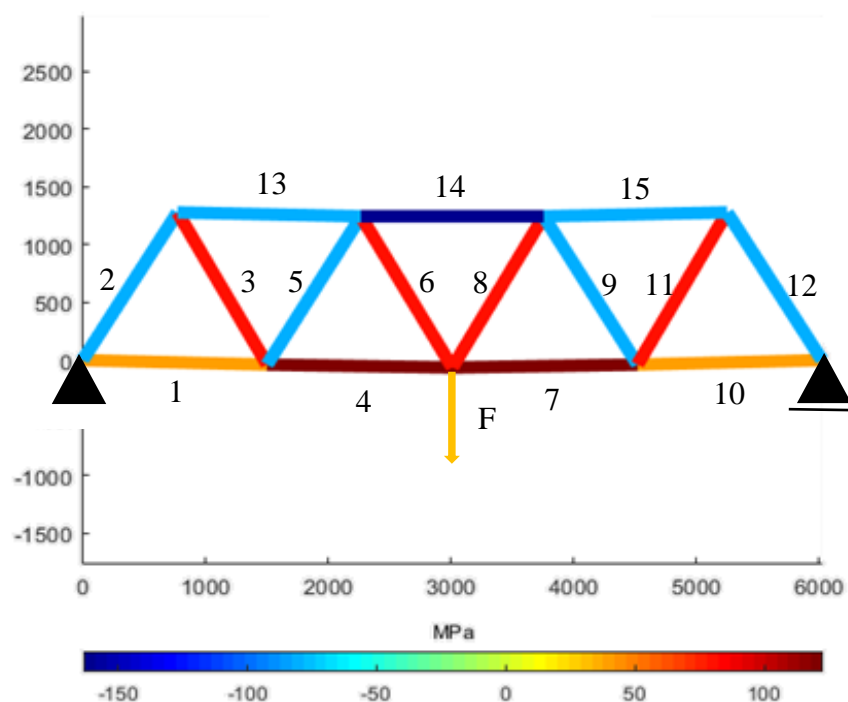
$$\sigma_i = E_i * [-1/L_i \quad 1/L_i] * \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad (18)$$

kde  $i$  značí  $i$ -tý prvek,  $\sigma$  napětí v ose prutu,  $E$  modul pružnosti v tahu,  $L$  délku prvku a  $u, v$  vypočítané posuvy.

## Výsledek

Výsledek pro výchozí nastavení je znázorněn na obr. 21, kde hodnoty na osách představují délku v milimetrech, průměry prutů jsou zobrazeny pomocí tloušťky čar a napětí je zobrazeno pomocí barevné stupnice s měřítkem umístěným pod grafem. Vypočtené hodnoty lze považovat za shodné s výsledky z ANSYSu (viz tab. 1). Liší se na druhém desetinném místě, což může být způsobeno numerickou chybou.





Obr. 21: Vykreslení vypočteného napětí u mostní konstrukce zatížené a uchycené dle obrázku skriptem MKP.m s vyznačenými čísly jednotlivých prvků (prutů).

Tab. 1: Porovnání hodnot napětí na jednotlivých prutech vypočítané pomocí MKP softwaru Ansys a využitím vytvořeného skriptu MKP.m

Číslo prutu	Napětí [MPa]	
	MKP.m	Ansys
1	40,8404	40,8392
2	-81,679	-81,6784
3	81,679	81,6784
4	122,5211	122,5175
5	-81,679	-81,6784
6	81,679	81,6784
7	122,5211	122,5175
8	81,679	81,6784
9	-81,679	-81,6784
10	40,8404	40,8392
11	81,679	81,6784
12	-81,679	-81,6784
13	-81,6808	-81,6784
14	-163,362	-163,357
15	-81,6808	-81,6784

## 3.2 Optimalizace průměrů prutů podle dovoleného napětí

Pro účely optimalizace průměrů byl vytvořen skript v prostředí programu MATLAB s názvem FSD.m. Ten slouží k určení hodnoty plochy průřezu jednotlivých prutů na základě maximálního dovoleného napětí. Toho je dosaženo výpočtem napětí (respektive osových sil) v jednotlivých prutech, ze kterých je podle vztahu (8) přiřazen příčný průřez (viz kapitola 2.3.3).

### Vstupní hodnoty

Ve výchozím nastavení je skript nastaven na výpočet úlohy z kapitoly 3.1. Je nutné navíc zadat hodnotu dovoleného napětí a počet iterací. Skript je stejně jako předchozí modifikovatelný na jiné 2D statické úlohy se silovým zatížením.

### Výpočet

Výpočet napětí v jednotlivých elementech (prutech) probíhá s pomocí výše uvedeného skriptu MKP.m. Pro získání reálnějších výsledků je přiřazování plochy průřezu doplněno o kontrolu na vzpěr na základě vztahu (19). Tento vztah platí za předpokladu, že je štíhlost prvku větší než kritická ( $\lambda > \lambda_{kr}$ ), což znamená, že bude dříve dosaženo mezního stavu vzpěrné stability než mezního stavu pružnosti. Kritickou štíhlost vypočítáme pomocí vztahu (20) a štíhlost prvku pomocí vztahu (21). Výpočet kritické síly a štíhlosti prvku je nastaven pro plný kruhový průřez, pro jiný tvar je nutné ve skriptu přepsat vzorec pro výpočet minimálního kvadratického momentu.

$$F_{kr} = \alpha \frac{EJ}{L^2} \quad (19)$$

$$\lambda_{kr} = \alpha \sqrt{\left(\frac{E}{\sigma_k}\right)} \quad (20)$$

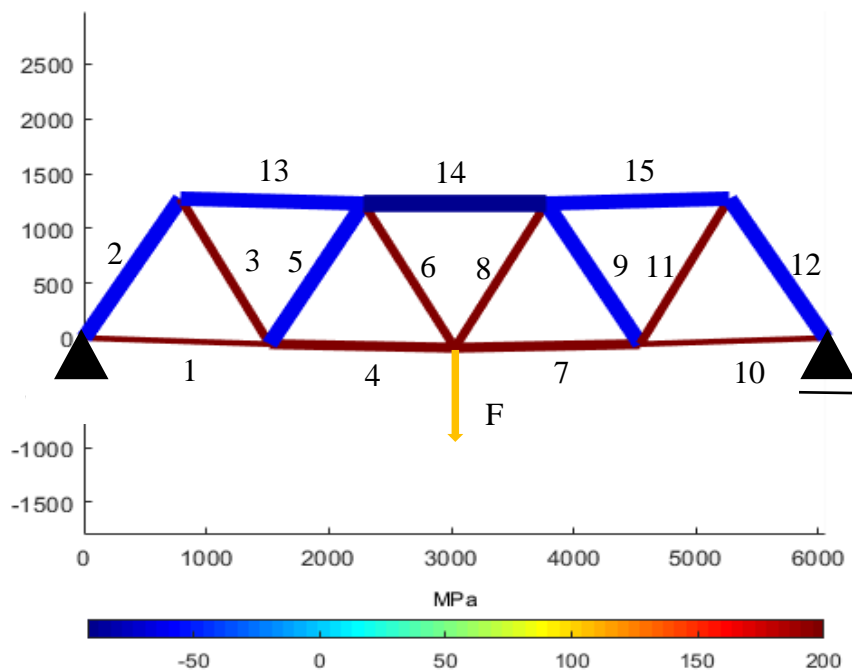
$$\lambda = \alpha \frac{L}{\sqrt{\frac{J}{S}}} \quad (21)$$

kde  $F_{kr}$  je kritická síla,  $\alpha$  je koeficient pro dané uložení (v mém případě  $\alpha = \pi$ ),  $E$  je modul pružnosti v tahu,  $J$  je minimální kvadratický moment,  $\sigma_k$  je mez kluzu,  $L$  je délka prutu a  $S$  je příčný průřez prvku.

### Výsledek

Výsledek skriptu FSD je znázorněn na obr. 22. Z obrázku je patrné, že z důvodu mezního stavu vzpěrné stability nebylo dosaženo ve všech prutech namáhaných na tlak maximálního dovoleného napětí. V reálných aplikacích se z tohoto důvodu běžně používají jiné profily prutů, které mají větší hodnotu kvadratického momentu průřezu,

z čehož plyne větší odolnost vůči meznímu stavu vzpěrné stability. Přesné hodnoty napětí v jednotlivých prutech a jejich plochy průřezů, respektive průměry jsou vypsány v tab. 2.



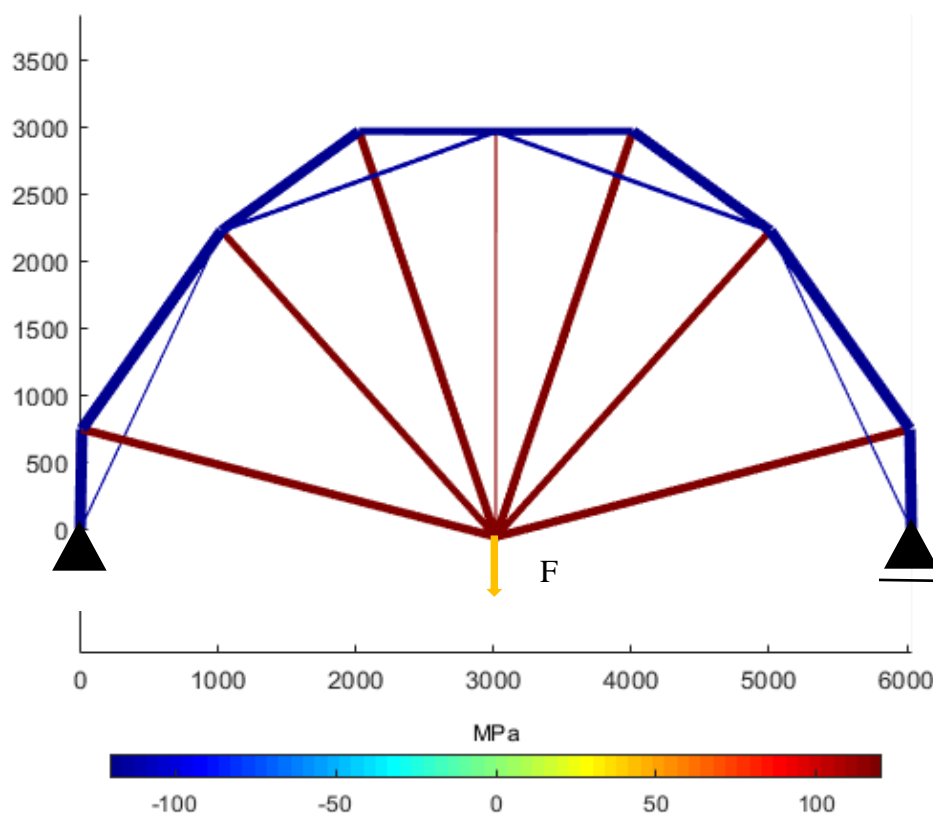
Obr. 22: Vykreslení optimalizované mostní konstrukce zatížené a uchycené dle obrázku skriptem FSD.m s vyznačenými čísly jednotlivých prvků (prutů).

Tab. 2: Hodnoty napětí, ploch průřezů a průměrů optimalizovaných prutů.

Číslo prutu	Napětí [MPa]	Plochy průřezů [mm <sup>2</sup> ]	Průměry [mm]
1	200,00	144,34	6,78
2	-65,06	887,46	16,81
3	200,00	288,68	9,59
4	200,00	433,03	11,74
5	-65,06	887,46	16,81
6	200,00	288,68	9,59
7	200,00	433,03	11,74
8	200,00	288,68	9,59
9	-65,06	887,46	16,81
10	200,00	144,34	6,78
11	200,00	288,68	9,59
12	-65,06	887,46	16,81
13	-65,06	887,49	16,81
14	-92,00	1255,10	19,99
15	-65,06	887,49	16,81

### 3.3 Topologická optimalizace podle dovoleného napětí

Metodu FSD je možné použít také pro topologickou optimalizaci. Za tímto účelem byl v prostředí programu MATLAB vytvořen skript pro topologickou optimalizaci FSD\_mod.m, který vznikl úpravou skriptu FSD.m. Ze skriptu byla odstraněna kontrola na vzpěr (aby hodnota plochy průřezu málo zatížených prutů v tlaku lépe konvergovala k minimální hodnotě), a jako výchozí struktura byla nastavena hustá síť navzájem propojených uzlů, tzv. “*ground structure*“, která je generována automaticky ze zadaného počtu uzlů. Minimální hodnota plochy průřezu je nastavena na  $0,001\text{mm}^2$ . Další snižování této hodnoty nedoporučuji z důvodu narůstající numerické chyby. Výstup z tohoto skriptu je znázorněn na obr. 23. Vzhledem k odstranění kontroly na vzpěr výsledek popisuje pouze vhodný tvar, napětí je pouze orientační.



Obr. 23: Výsledný tvar prutové soustavy pro výchozí strukturu 7x5 uzlů a zatížení uprostřed jednou silou.

### 3.4 Optimalizace poloh styčníků prutových soustav

Pro účely optimalizace poloh styčníků prutových soustav byl vytvořen skript v prostředí programu MATLAB s názvem SHAPE.m. Ten slouží k úpravě souřadnic uzlů předem definované prutové soustavy tak, aby její výsledný průhyb v požadovaném místě byl minimální. Vzhledem k tomu, že souřadnice uzlů se mění pouze ve svém blízkém okolí,

je vždy dosaženo lokálního minima průhybu, které však nutně nemusí být minimem globálním. Záleží zde tedy primárně na volbě tvaru výchozí struktury a také na volbě velikosti posuvu daného uzlu při procesu optimalizace.

### Vstupní hodnoty

Ve výchozím nastavení je skript nastaven na optimalizaci tvaru úlohy z kapitoly 3.1. Minimalizovaným posuvem je posuv ve směru osy  $y$  uprostřed mostu (dále jen průhyb) a optimalizovaná je poloha horních uzlů. Skript je stejně jako předchozí modifikovatelný na libovolnou 2D statickou úlohu s prutovými prvky a silovým zatížením.

### Výpočet

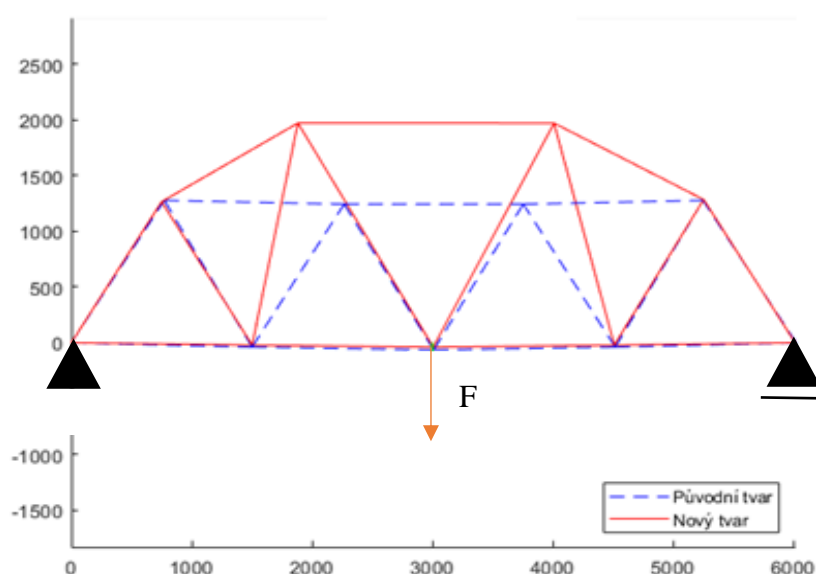
Výpočet posuvů v jednotlivých uzlových bodech (styčnicích) prutové soustavy probíhá s pomocí výše uvedeného skriptu MKP.m. Nejdříve je vypočtený počáteční průhyb a následně začíná optimalizační cyklus, ve kterém jsou postupně se všemi optimalizovanými uzly při každé iteraci provedeny následující operace:

- 1) Posunutí uzlu ve směru  $x$  o hodnotu definovanou ve vstupních hodnotách.
- 2) Výpočet posuvů (s využitím algoritmu definovaného ve skriptu MKP.m).
- 3) Je-li průhyb menší než ve struktuře s původní souřadnicí daného uzlu, je tato souřadnice uložena.

Tyto 3 body jsou provedeny ještě ve směrech:  $-x$ ,  $y$  a  $-y$ . Z tohoto plyne zároveň náročnost dané metody při uvažování větší struktur.

### Výsledek

Výstup z tohoto skriptu je znázorněn na obr. 24. Průhyb uprostřed mostu byl pro délku  $L = 6m$  a zatížení  $F = 100kN$  zredukován z 6,4 mm na 3,9mm.



Obr. 24: Optimalizovaný tvar mostní konstrukce skriptem SHAPE.m.

### 3.5 Topologická optimalizace s využitím metody (B)ESO

Za účelem topologické optimalizace prutových soustav byl v prostředí programu MATLAB vytvořen skript (B)ESO.m, založený na metodě BESO.

#### Vstupní hodnoty

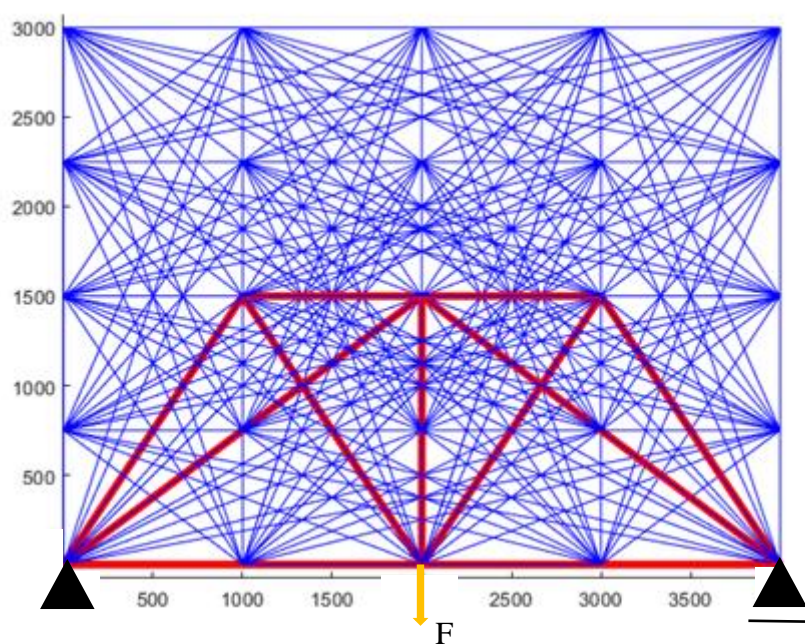
Ve výchozím nastavení je skript nastaven k topologické optimalizaci mostní konstrukce zatížené uprostřed. Uživatel zadá počet uzlů, ze kterých se automaticky vygeneruje výchozí struktura, počet iterací a počet odstraněných a přidaných prutů při každé iteraci. Skript je stejně jako předchozí modifikovatelný na libovolnou statickou úlohu s prutovými prvky a silovým zatížením.

#### Výpočet

Oproti klasické metodě BESO byly provedeny změny v algoritmu z toho důvodu, že při úlohách definovaných v úvodu kapitoly 3 v prutech vznikají podobná napětí a při určité hodnotě  $RR$  se soustava rozpadala.

První změnou oproti metodě BESO je, že se pruty přímo neodstraňují, jsou pouze přerazeny z reálného materiálu s příčným průřezem  $S_R$  a modulem pružnosti v tahu  $E_R$  do vrstvy virtuálního materiálu s příčným průřezem  $S_R/1000$  a  $E_R/1000$ . Tento postup je inspirovaný metodou SERA ze zdroje [3].

Další změna je ve způsobu odstraňování a přidávání prutů. Tento proces probíhá tak, že je při každé iteraci vypočteno napětí ve všech prutech. Z reálného materiálu je přerazen předem specifikovaný počet prutů s nejnižším napětím (v absolutní hodnotě) do virtuálního materiálu. Naopak z virtuálního materiálu je do reálného materiálu přerazen předem specifikovaný počet prutů s nejvyšším napětím (v absolutní hodnotě).



Obr. 25: Výsledný tvar prutové soustavy pro výchozí strukturu 5x5 uzlů a zatížení uprostřed jednou silou.

## Výsledek

Při zkoušení skriptu se ukázalo, že přerazování prutů z virtuálního zpátky do reálného materiálu není moc efektivní. Ve většině případů jsou totiž tyto pruty vrácené do virtuálního materiálu v následující iteraci. Z tohoto důvodu je ve výchozím nastavení počet přidávaných prutů roven nule a název skriptu (B)ESO. Výstup ze skriptu (B)ESO je znázorněn na obr. 25. Červená barva představuje reálné a modrá virtuální pruty.

## 3.6 Topologická optimalizace s využitím metody SKO

Za účelem topologické optimalizace prutových soustav byl v prostředí programu MATLAB vytvořen skript SKO.m, založený na metodě SKO.

### Vstupní hodnoty

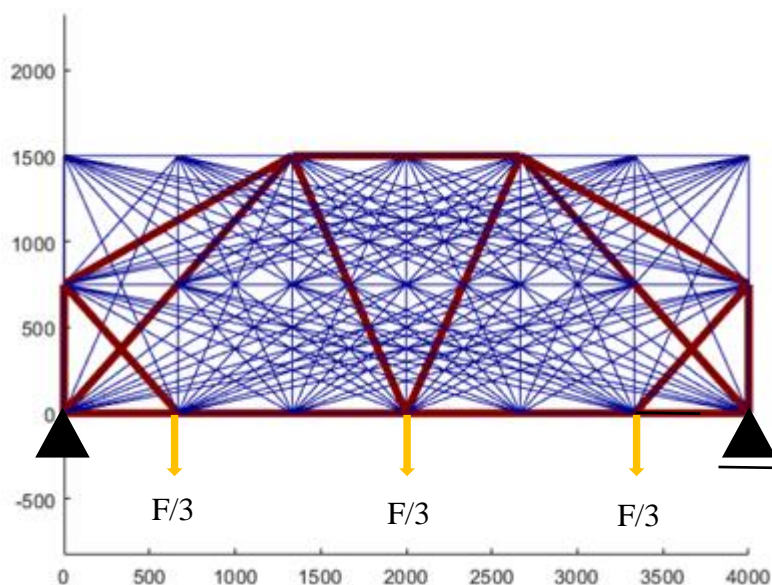
Ve výchozím nastavení je skript nastaven k topologické optimalizaci mostní konstrukce zatížené ve třech uzlech (viz obr. 26). Uživatel zadá počet uzlů, ze kterých se automaticky vygeneruje výchozí struktura, počet iterací a nastaví hodnotu referenčního napětí. Skript je stejně jako předchozí skripty modifikovatelný na libovolnou 2D statickou úlohu s prutovými prvky a silovým zatížením.

### Výpočet

Výpočet napětí probíhá pomocí skriptu MKP.m. Dále je proces shodný s popisem v kapitole 2.3.6.

### Výsledek

Výsledek skriptu SKO.m je znázorněn na obr. 26. Červená barva představuje pruty s hodnotou modulu pružnosti v tahu  $E = 210 \text{ GPa}$  a modrá barva pruty s hodnotou modulu pružnosti v tahu  $E = 210/1000 \text{ GPa}$ .



Obr. 26: Výsledný tvar prutové soustavy pro výchozí strukturu 7x5 uzlů a zatížení ve 3 uzlech.



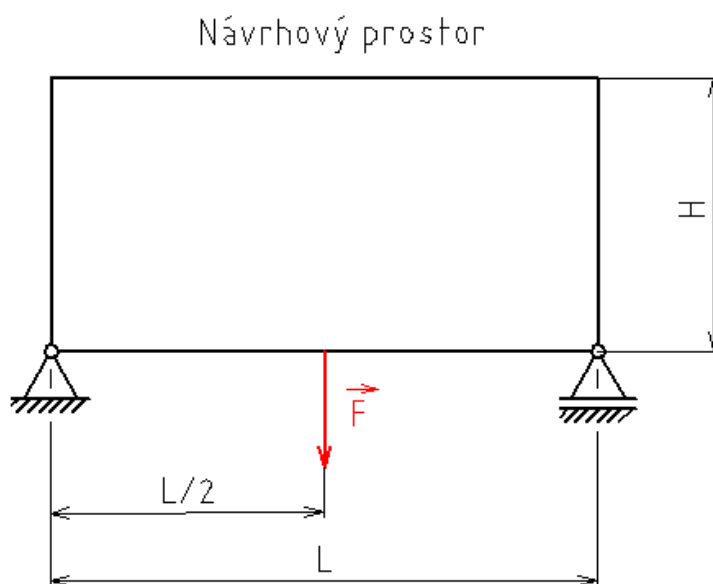
### 3.7 Porovnání výsledků jednotlivých metod

Z popisu skriptů SKO.m, (B)ESO.m a FSD\_mod.m vyplývá, že vzhledem k absenci kontroly na vzpěr a přítomných virtuálních prvků ve výpočtu jejich výsledek popisuje pouze vhodný tvar soustavy a vypočtené napětí je pouze orientační. Dalším problémem je, že v některých výsledných tvarech se pruty kříží nebo překrývají, což v realitě není možné a pro reálnější výsledky by bylo potřeba skripty upravit tak, aby se v místech překřížení automaticky vytvořily nové styčníky a překrývající se pruty byly odstraněny.

Pro porovnání výsledků byl tedy zvolen takový postup, že se danou metodou prvně získal tvar soustavy, který byl v některých případech mírně upraven přidáním prutů propojujících podpory se zatížením. Následně byl tento tvar optimalizován skriptem FSD.m. Tímto bylo dosaženo stejných podmínek pro všechny tvary – dosažení dovoleného napětí nebo mezního stavu vzpěrné stability ve všech prutech.

#### 3.7.1 Most zatížený uprostřed

Pro tento modelový příklad byly zvoleny následující rozměry: délka  $L = 6m$  a výška  $H = 2m$  (pro první srovnání) a výška  $H = 4m$  (pro druhé srovnání). Síla  $F = 100kN$  v obou případech viz obr. 27.

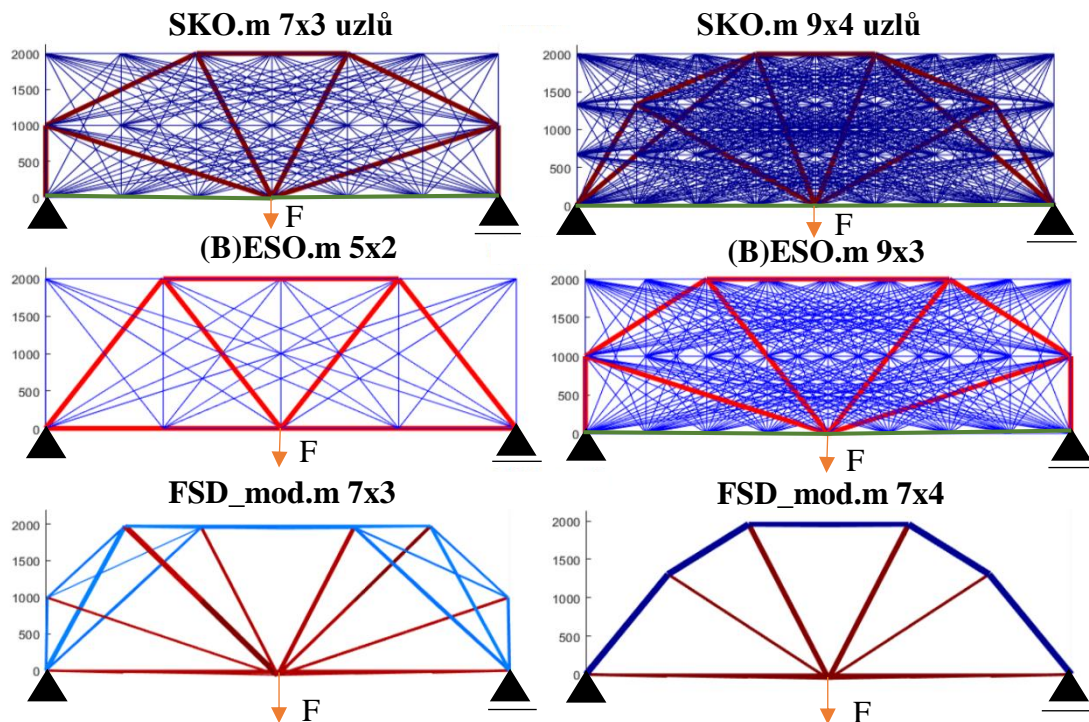


Obr. 27: Návrhový prostor mostní konstrukce zatížené uprostřed.



**Rozměry  $L = 6m$ ;  $H = 2m$**

Tvary získané topologickou optimalizací této úlohy jsou zobrazeny na obr. 28 a dosažené hodnoty hmotností a průhybů v tab. 3. Do některých výsledných tvarů byly uměle přidány pruty znázorněné zelenou barvou kvůli splnění předpokladů prutové soustavy (do každého styčnicku vstupují alespoň dva pruty).



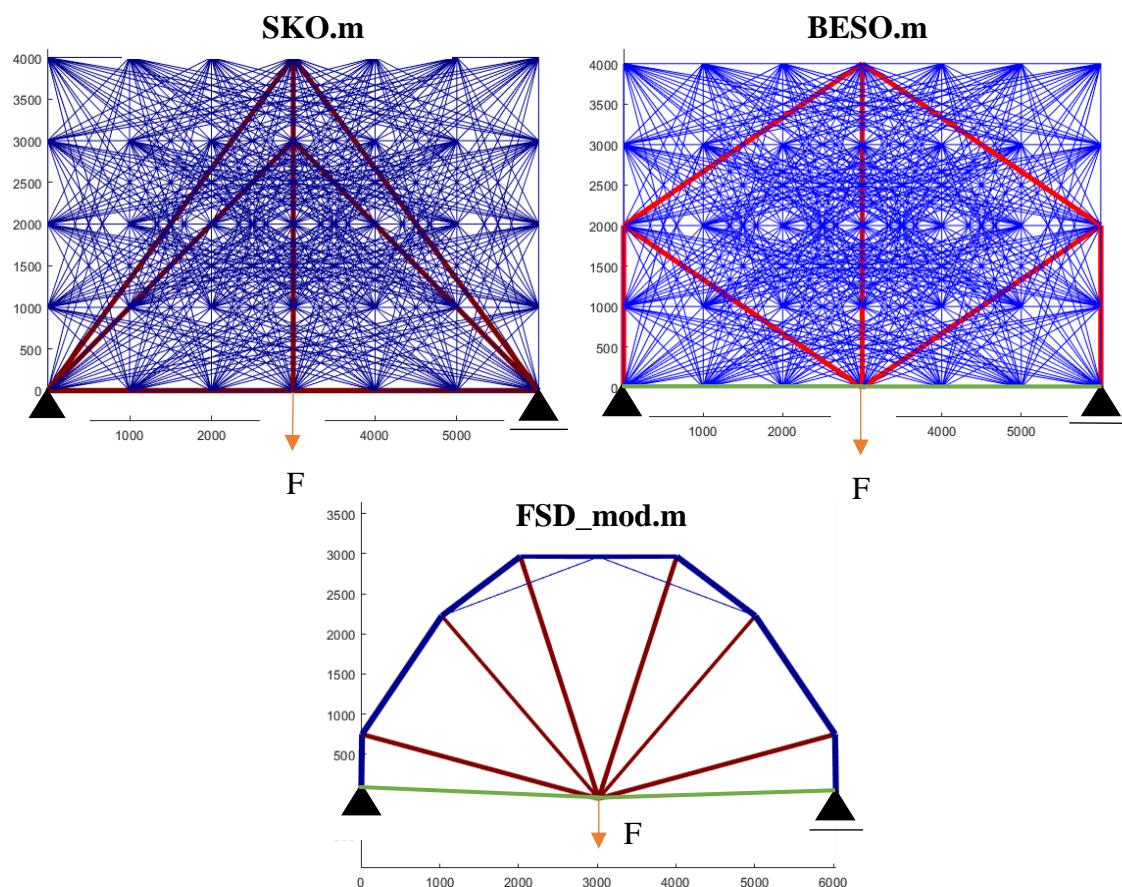
Obr. 28: Výsledky topologické optimalizace mostní konstrukce o rozměrech  $L = 6m$ ,  $H = 2m$  zatížené uprostřed pro různý počet uzlů.

Tab. 3: Výsledné hmotnosti a průhyby uprostřed mostní konstrukce zatížené jednou silou uprostřed při uvažování rozměrů  $L = 6m$ ,  $H = 2m$ .

Metoda	Počet uzlů	Hmotnost [kg]	Průhyb [mm]
SKO	7x3	101,62	-6,74
	9x4	132,6	-6,3
(B)ESO	5x2	129,14	-6,12
	9x3	108,35	-6,56
FSD_mod	7x3	159,2	-6,19
	7x4	82,98	-6,64

**Rozměry  $L = 6m$ ;  $H = 4m$**

Tvary získané topologickou optimalizací této úlohy jsou zobrazeny na obr. 29 a dosažené hodnoty hmotností a průhybů v tab. 4. Do některých výsledných tvarů byly uměle přidány pruty znázorněné zelenou barvou kvůli splnění předpokladů prutové soustavy (do každého styčnicku vstupují alespoň dva pruty).



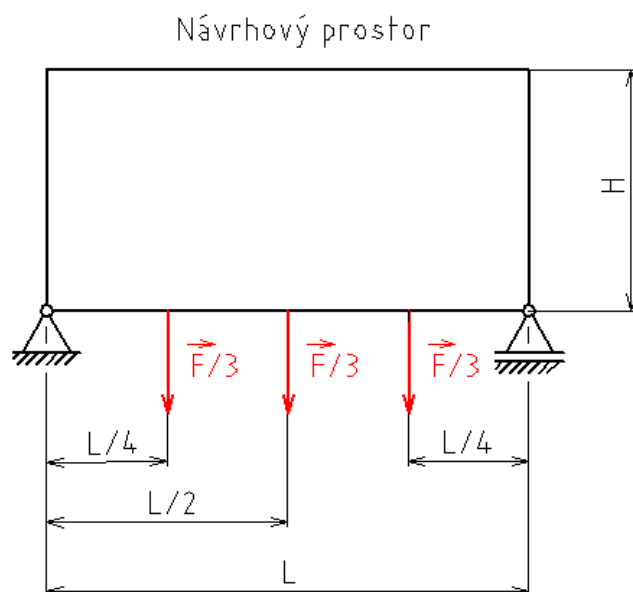
Obr. 29: Výsledky topologické optimalizace mostní konstrukce o rozměrech  $L = 6m$ ,  $H = 4m$  zatížené jednou silou uprostřed pro  $7 \times 5$  uzlů.

Tab. 4: Výsledné hmotnosti a průhyby uprostřed mostní konstrukce zatížené jednou silou uprostřed při uvažování rozměrů  $L = 6m$ ,  $H = 4m$ .

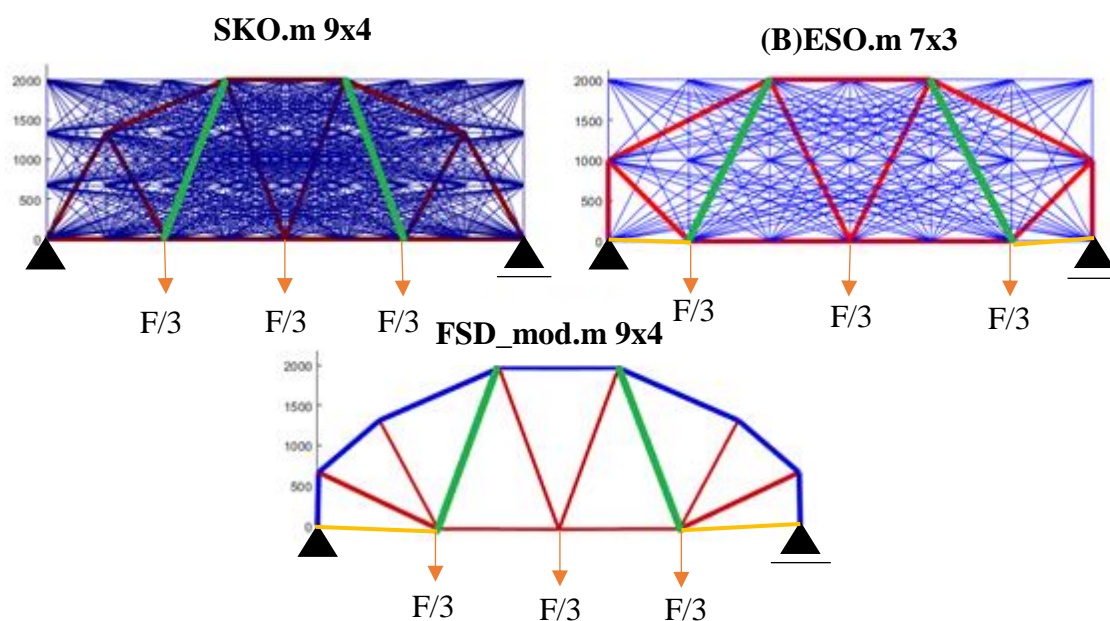
Metoda	Počet uzlů	Hmotnost [kg]	Průhyb [mm]
SKO	7x5	185,38	-7,23
(B)ESO	7x5	142,31	-7
FSD_mod	7x5	83,03	-6,16

### 3.7.2 Most zatížený ve 3 místech

Pro tento modelový příklad byly zvoleny následující rozměry: délka  $L = 6m$  a výška  $H = 2m$ . Most je zatížený ve 3 místech viz obr. 30, síla  $F = 100kN$ . Tvary získané topologickou optimalizací této úlohy jsou zobrazeny na obr. 31 a dosažené hodnoty hmotností a průhybů v tab. 5. Do některých výsledných tvarů byly uměle přidány pruty znázorněné oranžovou barvou kvůli splnění předpokladů prutové soustavy (do každého styčníku vstupují alespoň dva pruty). Do všech výsledných tvarů bylo navíc nutné přidat pruty znázorněné zelenou barvou pro získání staticky určité prutové soustavy.



Obr. 30: Návrhový prostor mostní konstrukce zatížené ve 3 styčnicích.



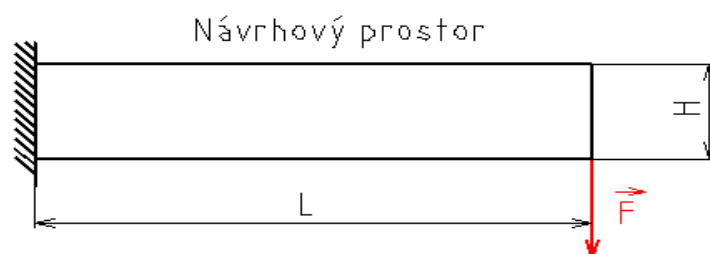
Obr. 31: Výsledky topologické optimalizace mostní konstrukce o rozměrech  $L = 6m$ ,  $H = 2m$  zatížené ve 3 styčnicích pro různý počet uzlů.

Tab. 5: Výsledné hmotnosti a průhyby uprostřed mostní konstrukce zatížené třemi silami dle obr. 30 při uvažování rozměrů  $L = 6m$ ,  $H = 2m$ .

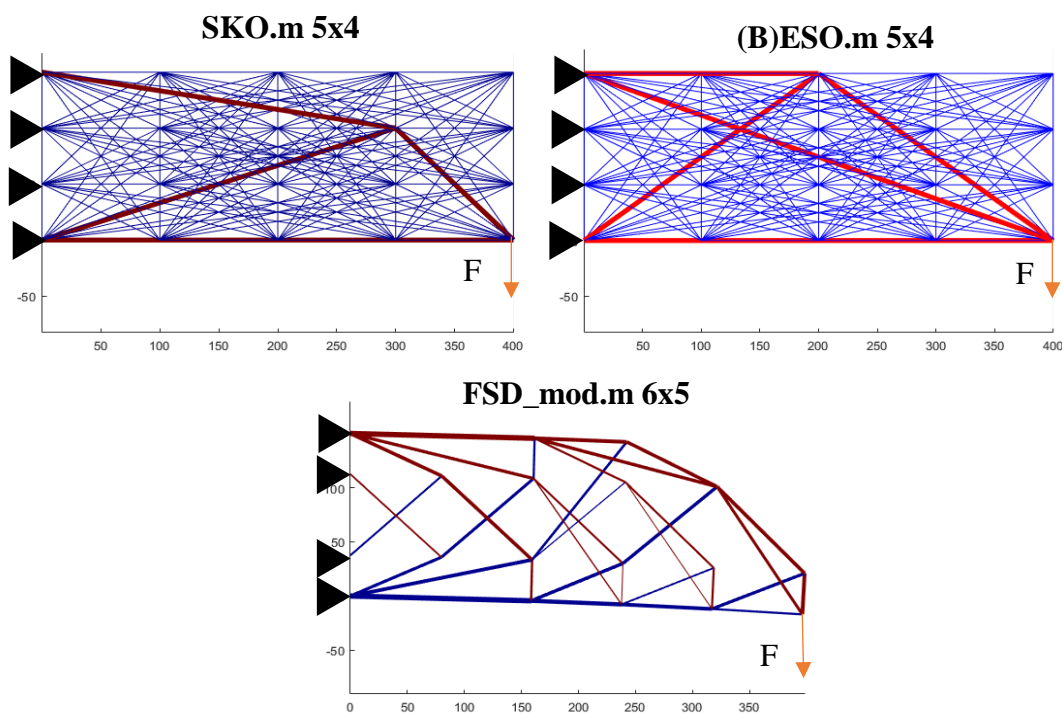
Metoda	Počet uzlů	Hmotnost [kg]	Průhyb [mm]
SKO	9x4	70,69	-5,56
(B)ESO	7x3	86,73	-5,51
FSD_mod	9x4	61,24	-5,82

### 3.7.3 Nosník zatížený v pravém dolním rohu

Pro tento modelový příklad byly zvoleny následující rozměry: délka  $L = 0,4m$  a výška  $H = 0,15m$ , síla  $F = 50kN$  viz obr. 32. Tvary získané topologickou optimalizací této úlohy jsou zobrazeny na obr. 33 a dosažené hodnoty hmotností a průhybů v tab. 6.



Obr. 32: Návrhový prostor konzolového nosníku zatíženého v pravém dolním rohu.



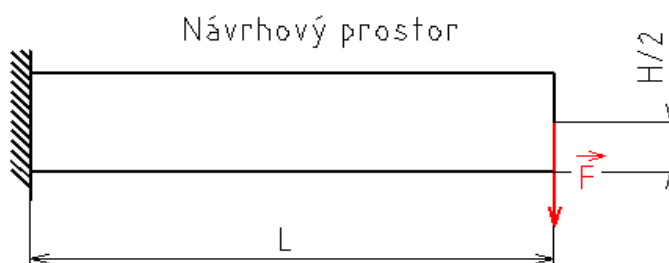
Obr. 33: Výsledky topologické optimalizace konzolového nosníku o rozměrech  $L = 0,4m$  a  $H = 0,15m$  se zatížením v pravém dolním rohu pro různý počet uzlů.

Tab. 6: Výsledné hmotnosti a průhyby konzolového nosníku zatíženého jednou silou v pravém dolním konci při uvažování rozměrů  $L = 6m$ ,  $H = 4m$ .

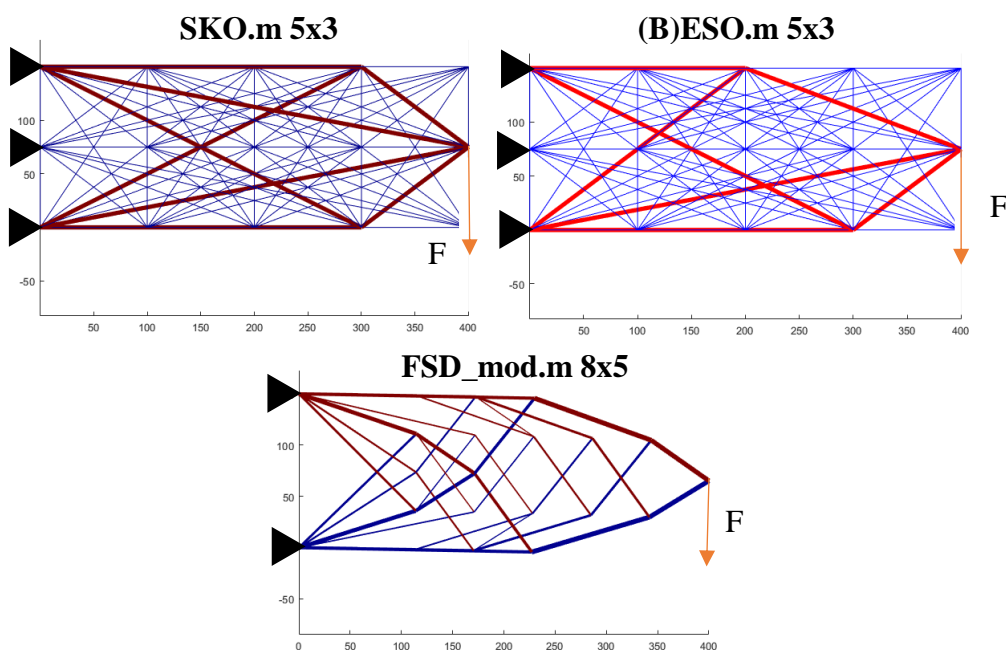
Metoda	Počet uzlů	Hmotnost [kg]	Průhyb [mm]
SKO	5x4	3,88	-1,88
(B)ESO	5x4	3,74	-1,82
FSD_mod	6x5	3,49	-1,69

### 3.7.4 Nosník zatížený vpravo uprostřed

Pro tento modelový příklad byly zvoleny následující rozměry: délka  $L = 0,4m$  a výška  $H = 0,15m$ , síla  $F = 50kN$  viz obr. 34. Tvary získané topologickou optimalizací této úlohy jsou zobrazeny na obr. 35 a dosažené hodnoty hmotností a průhybů v tab. 7.



Obr. 34: Návrhový prostor konzolového nosníku zatíženého vpravo uprostřed.



Obr. 35: Výsledky topologické optimalizace konzolového nosníku o rozměrech  $L = 0,4m$  a  $H = 0,15m$  se zatížením vpravo uprostřed pro různý počet uzlů.

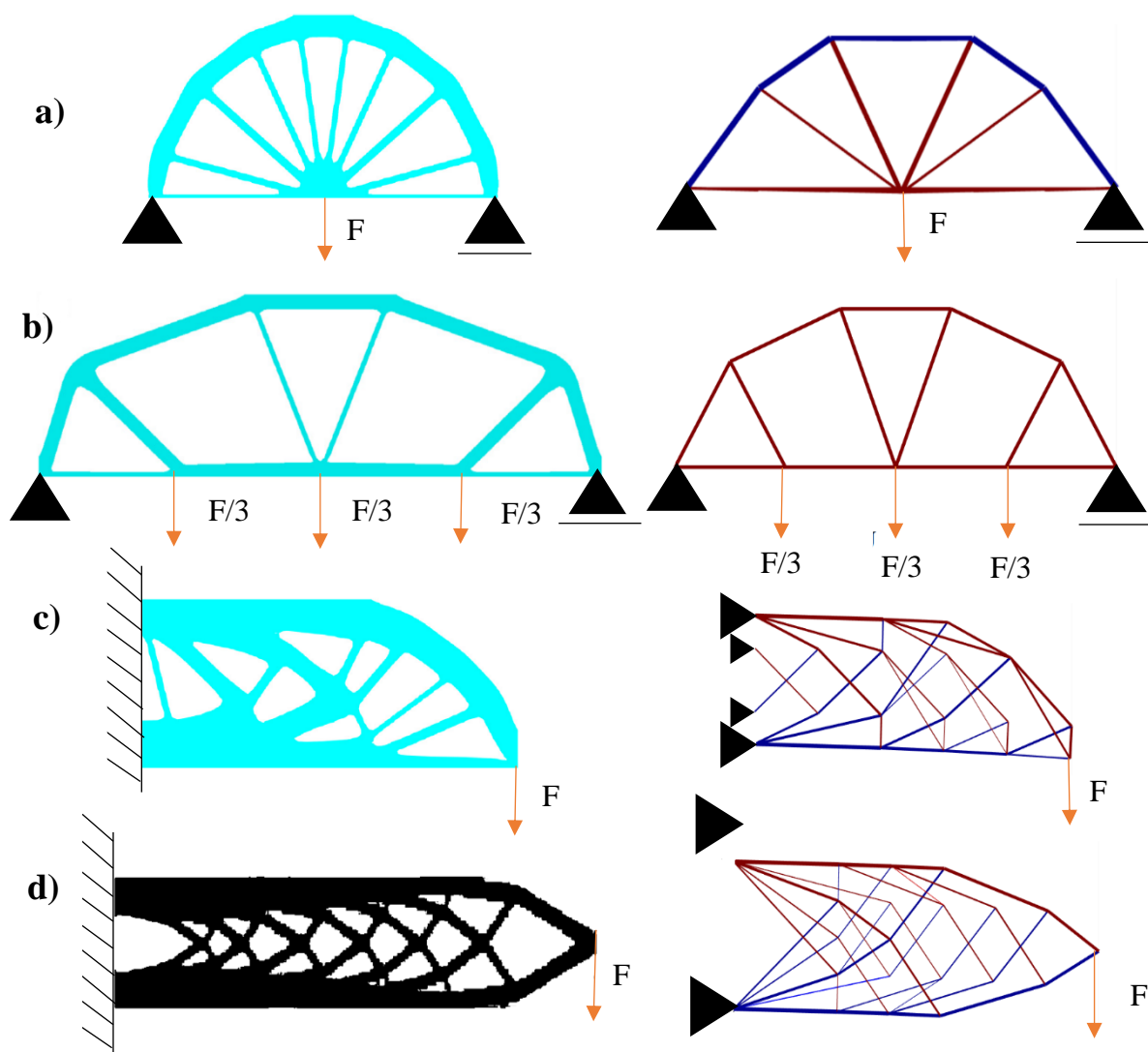
*Tab. 7: Výsledné hmotnosti a průhyby konzolového nosníku zatíženého jednou silou vpravo uprostřed při uvažování rozměrů  $L = 6m$ ,  $H = 4m$ .*

<b>Metoda</b>	<b>Počet uzlů</b>	<b>Hmotnost [kg]</b>	<b>Průhyb [mm]</b>
SKO	5x3	4,01	-1,86
(B)ESO	5x3	3,82	-1,82
FSD_mod	8x5	3,37	-1,63



## 4 ZHODNOCENÍ A DISKUZE

Výsledné tvary konstrukcí získané topologickou optimalizací modelových úloh popsaných v úvodu kapitoly 3 (obr. 36 a) - d) vpravo), jsou velmi podobné výsledkům topologické optimalizace kontinua ze zdrojů [3] a [7] viz obr. 36 a) – d) (vlevo). V případě mostní konstrukce zatížené ve třech místech (viz obr. 36b) vzniká při použití optimalizačních skriptů z této práce vnitřně staticky přeurlčená prutová soustava. Tento problém se objevuje také ve zdroji [3] a [7] a je zde uvedeno, že je možné problém odstranit použitím tzv. „multiple load case“ přístupu. Tento přístup znamená výpočet napětí (případně posuvů) pro každou sílu zvlášť a následné použití váženého aritmetického průměru těchto hodnot pro následnou optimalizaci. [7]



Obr. 36: Porovnání dosažených výsledků skriptem *FSD\_mod* – a),c),d) a skriptem *SKO* - b) (vpravo) s výsledky ze zdroje [3] – a),b),c) a ze zdroje [8] – d) (vlevo).

## 4.1 Celkové zhodnocení

Hlavní výhodou způsobu topologické optimalizace popsaného v této práci je rychlost výpočtu, který pro řešení úlohy i s vykreslením výsledného tvaru nepřekročil 30 vteřin. U skriptu FSD\_mod.m bylo k dosažení výsledných tvarů potřeba řádově 80 iterací, u skriptu SKO řádově 40 iterací a u skriptu (B)ESO řádově 100+ iterací. Z hlediska rychlosti výpočtu tedy nejlépe vychází metoda SKO.

Hlavní nevýhodou tohoto způsobu optimalizace je závislost na rozměrech návrhového prostoru a počtu uzlů výchozí struktury. Závislost na počtu uzlů výchozí struktury je demonstrována na optimalizaci mostu zatíženého uprostřed o rozměrech  $L = 6m$  a  $H = 2m$ , závislost na rozměrech návrhového prostoru je demonstrována na stejné úloze s rozměry  $L = 6m$  a  $H = 4m$ .

Nabízelo by se řešení zjemněním počáteční struktury (zvýšením počtu uzlů), to však není vhodné z důvodu výrazného nárůstu počtu prutů v počáteční struktuře. Počet prutů počáteční struktury lze vypočítat pomocí vztahu (22).

$$n = \frac{u_d \cdot u_v(u_d \cdot u_v - 1)}{2} \quad (22)$$

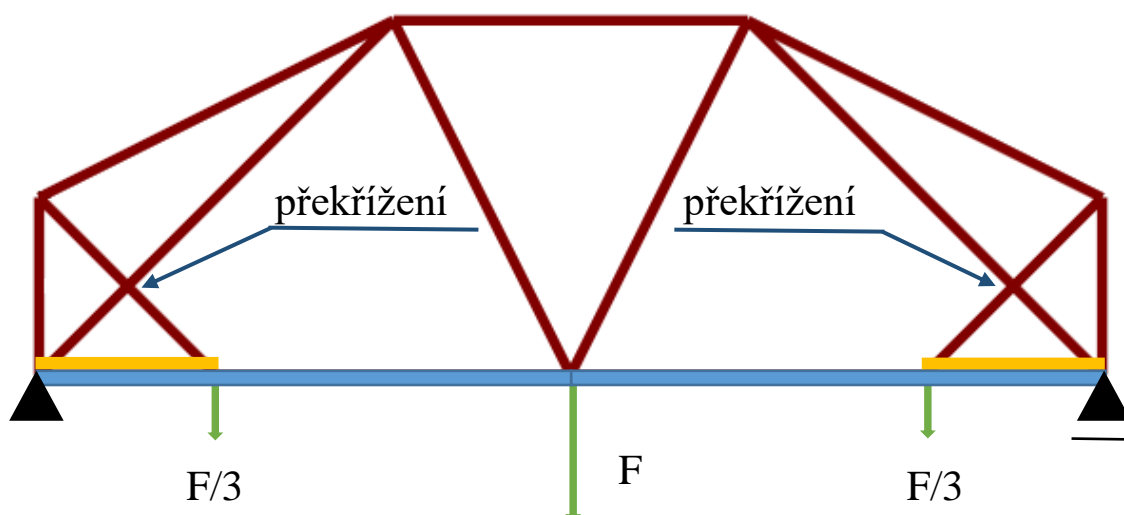
kde  $n$  je počet prutů,  $u_d$  je počet uzlů na délku a  $u_v$  je počet uzlů na výšku.

Například pro počáteční strukturu  $50 \times 20$  uzlů vznikne v soustavě 499500 prutů, z čehož vychází další nedostatek těchto skriptů. Pruty, které nejsou vykresleny ve výsledném tvaru, jsou totiž ve výpočtu stále uvažovány. Mají sice sníženou tuhost buď pomocí modulu pružnosti, nebo plochy průřezu (v závislosti na optimalizační metodě), avšak při takovém množství prutů vnášejí do soustavy nezanedbatelnou tuhost a tím značně ovlivňují výsledek.

Nabízelo by se řešit problém výraznějším snížením tuhosti jednotlivých prutů. Matice tuhosti takovýchto soustav by se ovšem blížila singulární matici a do výpočtu inverzní matice, respektive následně posuvů a napětí, dle kterých se optimalizuje, by byla vnesena výrazná numerická chyba. Skripty tedy ve stávající podobě doporučuji používat pro počáteční struktury mající celkově maximálně 40 uzlů.

Dalším problémem je, že v některých výsledných tvarech se pruty kříží nebo překrývají (viz obr. 37), což v realitě není možné a pro reálnější výsledky by bylo potřeba skripty upravit tak, aby se v místech překřížení automaticky vytvořily nové styčníky a překrývající se pruty byly odstraněny.





Obr. 37: Znáznornění překrývajících se prutů optimalizované struktury skriptem SKO.m zatížené a uchycené dle obrázku, pruty ve spodní části vykreslené modrou a oranžovou barvou se ve výsledné struktuře překrývají.

## 4.2 Vzájemné zhodnocení jednotlivých skriptů

Z tabulek 3 až 7 vyplývá, že ze srovnání vychází nejlépe skript FSD\_mod.m, který produkoval stabilně výsledky s nejnižší hmotností, přičemž průhyb byl srovnatelný s výsledky ostatních skriptů. Některé výsledné tvary skriptu FSD\_mod.m jsou ovšem geometricky poměrně složité. V tomto ohledu podávaly lepší výsledky skripty metod SKO a (B)ESO, u kterých se výsledné tvary zdají být jednodušší, což může být u prutové soustavy důležitým kritériem.



## 5 ZÁVĚR

Cílem této práce bylo seznámit se s problematikou topologické optimalizace a získané znalosti poté aplikovat na konkrétní úlohy u prutových soustav. V rešeršní části této práce byly nejdříve rozebrány a popsány jednotlivé metody strukturální optimalizace. Na základě rešerše byly zvoleny metody FSD („*Fully Stressed Design*“), SKO („*Soft kill Option*“) a BESO („*Bilinear Evolutionary Structural Optimization*“), které byly zpracovány pro optimalizaci prutových soustav ve formě výpočetních kódů (skriptů) v prostředí matematického softwaru MATLAB. K těmto metodám byl navíc vytvořen intuitivní skript pojmenovaný SHAPE.m sloužící k optimalizaci poloh styčníků.

Metody zvolené v této práci patří do skupiny „heuristické a intuitivní“, tj. není u nich vždy zaručen zcela optimální výsledek. To může být způsobeno zánikem důležitého propojení pro optimální strukturu na počátku iteračního procesu, které se vzhledem k optimalizačnímu způsobu těchto metod do výsledné struktury již nevrátí. Na druhou stranu by výsledné tvary měly být jednoduché, což může být u prutové soustavy důležitým kritériem.

Pro tvorbu optimalizačních skriptů bylo nejdříve nutné vytvořit skript MKP.m pro výpočet posuvů ve styčnicích a napětí v jednotlivých prutech s využitím metody konečných prvků, na základě kterých následně probíhá optimalizace velikosti, tvaru nebo topologická optimalizace. Výsledky tohoto skriptu byly verifikovány výpočtem stejné prutové soustavy v prostředí programu ANSYS Classic (viz příloha) a lze konstatovat, tyto výstupy jsou ve velmi dobré shodě. Algoritmus výpočtu napětí skriptu MKP.m byl tedy následně využit ve všech ostatních optimalizačních skriptech prezentovaných v této práci.

Po vytvoření skriptů bylo provedeno srovnání funkčnosti jednotlivých metod na dvou modelových úlohách – mostu a nosníku, z nichž nejlépe vychází modifikovaná FSD metoda, která produkovala stabilně výsledky s nejnižší hmotností, přičemž průhyb byl srovnatelný s výsledky ostatních skriptů. Výsledky skriptů jsou celkově podobné výsledkům jiných autorů, kteří optimalizovali soustavu jako kontinuum. Z celkového zhodnocení je však patrné, že použité optimalizační metody byly původně vytvořené pro kontinuum a při přímém použití na prutové soustavy trpí výše zmíněnými nedostatky, z nichž nejpodstatnější je závislost na výchozí struktuře. Naopak nespornou výhodou je rychlý výpočet a skripty tak mohou sloužit k vytvoření představy o výsledném tvaru optimální konstrukce.

Pro další vývoj skriptů by bylo vhodné omezit počet prutů ve výchozí struktuře pro snížení výpočetní náročnosti a přizpůsobit metody pro prutové soustavy, tj. zohlednit při vyřazování prutů mezní stav vzpěrné stability. Dále by bylo vhodné vytvořit algoritmus pro automatické vytvoření nových styčníků v místech, kde se pruty kříží a algoritmus pro odstranění překrývajících se prutů.

Všechny vytvořené skripty jsou součástí přiloženého CD a umožňují okamžité spuštění dané optimalizační metody v prostředí MATLAB, případně Ansys Classic.



# SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

Veličina	Jednotky	Popis
$\Omega_m$	[–]	Optimalizovaná součást
$\varepsilon$	[–]	Linearizované přetvoření
$\Omega$	[–]	Návrhový prostor
$A$	[mm <sup>2</sup> ]	Plocha příčného průřezu
$C$	[MPa <sup>-1</sup> ]	Poddajnost
$E$	[MPa]	Modul pružnosti v tahu
$ER$	[–]	Evoluční poměr
$F$	[N]	Síla
$IR$	[–]	Přídávací poměr
$J$	[mm <sup>4</sup> ]	Kvadratický moment
$K$	[MPa · mm]	Matice tuhosti
$L$	[mm]	Délka prvku
$N$	[–]	Počet prvků
$P$	[mm]	Kinematicky přípustný posuv
$RR$	[–]	Odebírací poměr
$RRV$	[–]	Objemový odebírací poměr
$T$	[K]	Teplota
$U$	[mm]	Matice posuvů
$V$	[mm <sup>3</sup> ]	Objem
$W$	[MPa]	Přípustné napětí
$a$	[J]	Energie napjatosti tělesa
$f$	[N]	Vnější zatížení
$k$	[–]	Měřítko
$l$	[J]	Potenciál vnějšího zatížení
$n$	[–]	Počet uzlů
$o$	[N]	Objemové zatížení
$p$	[–]	Penalizační faktor
$q$	[–]	Poměr napětí
$r$	[mm]	Rovnovážný stav
$u$	[mm]	Posuv v ose x
$v$	[mm]	Posuv v ose y
$w$	[mm]	Virtuální posuv
$\alpha$	[–]	Koeficient uložení

Veličina	Jednotky	Popis
$\lambda$	[–]	Štíhlost
$\rho$	$[kg \cdot m^{-3}]$	Hustota
$\sigma$	$[MPa]$	Napětí

Zkratka	Význam
<i>MKP</i>	Metoda konečných prvků
<i>FSD</i>	Plně zatížený design (“ <i>Fully Stressed Design</i> ”)
<i>BESO</i>	Obousměrně vyvíjející se struktura (“ <i>Bilinear Evolutionary Structure Optimization</i> ”)
<i>ESO</i>	Vyvíjející se struktura (“ <i>Evolutionary structure optimization</i> ”)
<i>SKO</i>	Pozvolné odstraňování materiálu (“ <i>Soft Kill Option</i> ”)
<i>SIMP</i>	Pevný izotropní materiál s penalizací (“ <i>Solid Isotropic Material with Penalization</i> ”)
<i>CAO</i>	Počítačem řízená tvarová optimalizace (“ <i>Computer-aided shape optimization</i> ”)

## SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] THOMAS. *Topology optimization of your parts* [online]. [vid. 2019-05-22]. Dostupné z: <https://www.formando.be/en/2017/12/12/topologie-optimalisatie/>
- [2] ZHANG, Weihong, Jihong ZHU, Tong GAO, Weihong ZHANG, Jihong ZHU a Tong GAO. *Topology Optimization in Engineering Structure Design* [online]. 2016. ISBN 9781785482243. Dostupné z: doi:10.1016/B978-1-78548-224-3.50003-7
- [3] QUERIN, Osvaldo M., Mariano VICTORIA, Cristina ALONSO, Rubèn ANSOLA a Pascual MARTÍ. *Topology Design Methods for Structural Optimization*. 2017. ISBN 9780081009161.
- [4] FANNI, M., SHABARA, M. N., ALKALLA, M. G. A comparison between different topology optimization methods [online]. 2014, [vid. 2019-04-05]. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/publication/265167203\\_A\\_Comparison\\_Between\\_Different\\_Topology\\_Optimization\\_Methods](https://www.researchgate.net/publication/265167203_A_Comparison_Between_Different_Topology_Optimization_Methods)
- [5] ASSIMI, Hirad, Ali JAMALI a Nader NARIMAN-ZADEH. Sizing and topology optimization of truss structures using genetic programming. *Swarm and Evolutionary Computation* [online]. 2017, **37**(May), 90–103, [vid. 2019-05-04]. ISSN 22106502. Dostupné z: doi:10.1016/j.swevo.2017.05.009
- [6] TEAM, LEAP FEA. *TOPOLOGICAL OPTIMISATION WITH ANSYS 17.0* [online]. [vid. 2019-03-22]. Dostupné z: <https://www.finiteelementanalysis.com.au/featured/topological-optimisation-with-ansys-17-0/>
- [7] BENDSØE, Martin P. a Ole SIGMUND. *Topology optimization: theory, methods, and applications* [online]. 2003 [vid. 2019-02-22]. ISBN 3540429921. Dostupné z: doi:10.1063/1.3278595
- [8] BENDSOE, Martin P. *Martin P. Bends0e Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*. nedatováno. ISBN 9783662031179.
- [9] LE, Chau. *Topology Optimization Overview* [online]. [vid. 2019-03-22]. Dostupné z: <http://home.bm-rd.com/topology-optimization-overview/>
- [10] *TOSCA STRUCTURE SIZING OPTIMIZATION WITH ABAQUS, OR ANSYS* [online]. [vid. 2019-03-25]. Dostupné z: <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/tosca/structure/sizing-optimization/>
- [11] SCHMIDT, Stephan. *GPUPop - Topology Optimization on CUDA Graphics Cards (GPU) in 3D* [online]. [vid. 2019-03-22]. Dostupné z: [https://www.math.uni-trier.de/~schmidt/gputop.html#/gputop\\_files/cant\\_s2.jpg](https://www.math.uni-trier.de/~schmidt/gputop.html#/gputop_files/cant_s2.jpg)
- [12] ALLAIRE, Grégoire, Lorenzo CAVALLINA, Nobuhito MIYAKE, Tomoyuki OKA a Toshiaki YACHIMURA. The homogenization method for topology optimization of structures: old and new [online]. 2019 [vid. 2019-04-05]. Dostupné z: <http://arxiv.org/abs/1901.09336>

- [13] IVVAN, Sergio, Valdez PE a Salvador Botello RIONDA. Topology optimization algorithms for the solution of compliance and volume problems in 2D [online]. 2016. [vid. 2019-05-04] Dostupné z: [https://www.cimat.mx/~ivvan/public/docs/TopologyOptimization/MAOM\\_Thesis.pdf](https://www.cimat.mx/~ivvan/public/docs/TopologyOptimization/MAOM_Thesis.pdf)
- [14] WANG, Y, Z LUO a N ZHANG. Design Optimization of Structures using A Nodal Density-Based SIMP Method [online]. 2008. [vid. 2019-03-22] Dostupné z: [http://www.sci-en-tech.com/apcom2013/APCOM2013-Proceedings/PDF\\_FullPaper/1793\\_Y.Wang.pdf](http://www.sci-en-tech.com/apcom2013/APCOM2013-Proceedings/PDF_FullPaper/1793_Y.Wang.pdf)
- [15] MARTÍNEZ, P., P. MARTÍ a O. M. QUERIN. Growth method for size, topology, and geometry optimization of truss structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization* [online]. 2007, **33**(1), 13–26. [vid. 2019-04-28] ISSN 1615147X. Dostupné z: doi:10.1007/s00158-006-0043-9
- [16] *Computer Aided Optimization* [online]. [vid. 2019-03-27]. Dostupné z: [https://de.wikipedia.org/wiki/Computer\\_Aided\\_Optimization](https://de.wikipedia.org/wiki/Computer_Aided_Optimization)
- [17] LOTHAR HARZHEIM. *Strukturoptimierung, Grundlagen und Anwendungen*. 2007. ISBN ISBN: 978-3-8171-1809-0.
- [18] HAMZA, Jan. *BMW využívá principy bioniky při vývoji automobilů – společný podnik s přírodou* [online]. 2005 [vid. 2019-03-27]. Dostupné z: <http://autoperiskop.cz/bmw-vyuziva-principy-bioniky-pri-vyvoji-automobilu-spolecny-podnik-s-prirodou/>
- [19] GONÇALVES, Filipe Assis. *Introduction to Structural Optimization using the ESO and BESO Evolutionary Methods* [online]. B.m., 2018. [vid. 2019-04-27] b.n. Dostupné z: [https://sigarra.up.pt/reitoria/pt/pub\\_geral.show\\_file?pi\\_doc\\_id=172488](https://sigarra.up.pt/reitoria/pt/pub_geral.show_file?pi_doc_id=172488)
- [20] HUANG, X, Y M XIE a M C BURRY. Advantages of Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization (BESO) Over Evolutionary Structural Optimization (ESO) [online]. 2007, **10**(6), 727–738. [vid. 2019-04-27] Dostupné z: [https://www.academia.edu/25539358/Advantages\\_of\\_Bi-Directional\\_Evolutionary\\_Structural\\_Optimization\\_BESO\\_Over\\_Evolutionary\\_Structural\\_Optimization\\_ESO\\_](https://www.academia.edu/25539358/Advantages_of_Bi-Directional_Evolutionary_Structural_Optimization_BESO_Over_Evolutionary_Structural_Optimization_ESO_)
- [21] PETRUŠKA, Jindřich. Počítačové metody mechaniky II. nedatováno.



# SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Ukázka výsledného tvaru topologické optimalizace – převzato z [1].....	17
Obr. 2: Ukázka síťování pro 3D kontinuální strukturu – převzato z [6].....	19
Obr. 3: Návrhový prostor a výchozí struktura („ <i>ground structure</i> “) o velikosti 7x3 uzlů pro optimalizaci mostní konstrukce.....	20
Obr. 4: Zobecněný tvar návrhového prostoru při hledání optimálního rozložení materiálu – převzato z [8]. ....	21
Obr. 5: Rozdělení strukturální optimalizace – převzato z [9].....	21
Obr. 6: Optimalizace tloušťky plechu u auta – převzato z [10].....	22
Obr. 7: Ukázka tvarové optimalizace otvorů v kole – převzato z [2]. ....	22
Obr. 8: Topologická optimalizace nosníku metodou SIMP 180x180x360 uzlů – převzato z [11].....	23
Obr. 9: Jednotková buňka s mikrootvorem o rozměrech $a$ a $b$ pro izotropní materiál. – převzato z [3] .....	24
Obr. 10: Ukázka optimalizovaných tvarů získaných metodou homogenizace – převzato z [12].....	24
Obr. 11: Proces optimalizace konzolového nosníku uchyceného vetknutím v levém konci a zatíženého uprostřed pravého konce metodou SIMP – převzato z [14]. ....	26
Obr. 12: Napětí jednotlivých prutů mostní konstrukce uchycené pomocí rotační a posuvné rotační vazby na krajích a zatížené uprostřed a) před, b) po optimalizaci velikosti metodou FSD.....	26
Obr. 13: a) Vytvoření nového uzlu a projení s ostatními uzly, b) Výběr prutů, které minimalizují optimalizovaný parametr – převzato z [15]. ....	28
Obr. 14: Průběh optimalizace konzolového nosníku, zatíženého uprostřed pravého konce, „Growth“ metodou, kde je a) návrhový prostor, b) výchozí styčníky, c) výchozí struktura, d) optimální výchozí struktura, e) - l) optimální tvar pro 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 399 přidáných styčníků – převzato z [15].....	28
Obr. 15: Optimalizace kruhového otvoru na desce metodou CAO – převzato z [17]. ...	30
Obr. 16: Optimalizace nosníku uchyceného rotačními vazbami na spodních okrajích a zatíženého uprostřed, vlevo metodou ESO, vpravo metodou BESO – převzato z [20]. ....	33
Obr. 17: Schématické zakreslení modelových úloh.....	37
Obr. 18: Znázornění řešení úlohy.....	38
Obr. 19: Prvek spojující uzly 1 a 2 .....	39
Obr. 20: Přiřazení členů prvkové matice do globální matice tuhosti.....	40
Obr. 21: Vykreslení výpočítaného napětí u mostní konstrukce zatížené a uchycené dle obrázku skriptem MKP.m.....	41
Obr. 22: Vykreslení optimalizované mostní konstrukce zatížené a uchycené dle obrázku skriptem FSD.m.....	43
Obr. 23: Výsledný tvar prutové soustavy pro výchozí strukturu 7x5 uzlů a zatížení uprostřed jednou silou .....	44
Obr. 24: Optimalizovaný tvar mostní konstrukce skriptem SHAPE.m.....	45
Obr. 25: Výsledný tvar prutové soustavy pro výchozí strukturu 5x5 uzlů a zatížení uprostřed jednou silou .....	46
Obr. 26: Výsledný tvar prutové soustavy pro výchozí strukturu 7x5 uzlů a zatížení ve 3 uzlech.....	47
Obr. 27: Návrhový prostor mostní konstrukce zatížené uprostřed .....	48

Obr. 28: Výsledky topologické optimalizace mostní konstrukce o rozměrech $L = 6m$ , $H = 2m$ zatížené uprostřed pro různý počet uzlů.....	49
Obr. 29: Výsledky topologické optimalizace mostní konstrukce o rozměrech $L = 6m$ , $H = 4m$ zatížené jednou silou uprostřed pro $7 \times 5$ uzlů .....	50
Obr. 30: Návrhový prostor mostní konstrukce zatížené ve 3 styčnicích.....	51
Obr. 31: Výsledky topologické optimalizace mostní konstrukce o rozměrech $L = 6m$ , $H = 2m$ zatížené ve 3 styčnicích pro různý počet uzlů.....	51
Obr. 32: Návrhový prostor konzolového nosníku zatíženého v pravém dolním rohu ....	52
Obr. 33: Výsledky topologické optimalizace konzolového nosníku o rozměrech $L = 0,4m$ a $H = 0,15m$ se zatížením v pravém dolním rohu pro různý počet uzlů.....	52
Obr. 34: Návrhový prostor konzolového nosníku zatíženého vpravo uprostřed.....	53
Obr. 35: Výsledky topologické optimalizace konzolového nosníku o rozměrech $L = 0,4m$ a $H = 0,15m$ se zatížením vpravo uprostřed pro různý počet uzlů	53
Obr. 36: Porovnání dosažených výsledků skriptem FSD_mod – a,c,d a skriptem SKO- b s výsledky ze zdroje [3] – a,b,c a ze zdroje [8] – d. ....	55
Obr. 37: Znázornění překrývajících se prutů optimalizované struktury skriptem SKO.m zatížené a uchycené dle obrázku, pruty ve spodní části vykreslené modrou a oranžovou barvou se ve výsledné struktuře překrývají.....	55

## SEZNAM TABULEK

Tab. 1: Porovnání hodnot napětí na jednotlivých prutech vypočítané pomocí MKP softwaru Ansys a využitím vytvořeného skriptu MKP.m .....	41
Tab. 2: Hodnoty napětí, ploch průřezů a průměrů optimalizovaných prutů .....	43
Tab. 3: Výsledné hmotnosti a průhyby uprostřed mostní konstrukce zatížené jednou silou uprostřed při uvažování rozměrů $L = 6\text{m}$ , $H = 2\text{m}$ .....	49
Tab. 4: Výsledné hmotnosti a průhyby uprostřed mostní konstrukce zatížené jednou silou uprostřed při uvažování rozměrů $L = 6\text{m}$ , $H = 4\text{m}$ .....	50
Tab. 5: Výsledné hmotnosti a průhyby uprostřed mostní konstrukce zatížené třemi silami dle obr.30 při uvažování rozměrů $L = 6\text{m}$ , $H = 2\text{m}$ .....	52
Tab. 6: Výsledné hmotnosti a průhyby konzolového nosníku zatíženého jednou silou v pravém dolním konci při uvažování rozměrů $L = 6\text{m}$ , $H = 4\text{m}$ .....	53
Tab. 7: Výsledné hmotnosti a průhyby konzolového nosníku zatíženého jednou silou vpravo uprostřed při uvažování rozměrů $L = 6\text{m}$ , $H = 4\text{m}$ .....	54



## SEZNAM PŘÍLOH

Příložené CD obsahující skripty v prostředí programu MATLAB, textový soubor, který může být otevřen v prostředí programu ANSYS Classic a textový soubor s tvary získané topologickou optimalizací modelových úloh ve formě, která může být vložena do skriptu FSD.m:

- MKP.m
- FSD.m
- FSD\_mod.m
- (B)ESO.m
- SKO.m
- Tvary.txt
- Mostni\_konstrukce.txt

Pozn.: Všechny potřebné vstupní parametry do výše uvedených skriptů jsou uvedeny v komentářích na příslušném řádku daného skriptu